

Combien de vendredi 13 dans une année ?

Les calendriers comme l'almanach du facteur n'ont pas toujours existé. L'ordinateur non plus...

Quand les navigateurs à partir de la fin du XV^e siècle sont partis pour de longs voyages, il fallait qu'ils sachent retrouver les dates, les jours pour connaître les jours de fêtes et les jours de pénitence.

Avec les moyens utilisés par ces navigateurs, nous vous proposons de résoudre le problème d'actualité en 2012 : Combien de vendredi 13 une année donnée ?

Sur l'almanach du facteur, en général au bas du mois de février, on trouve plusieurs informations¹ dont la (ou les) lettres dominicales et le cycle solaire qui servent à retrouver le jour de la semaine à une date de l'année donnée.

I- Deux exemples : 2011 & 2012

On suppose connue(s) la (ou les) lettre(s) dominicales dans les 2 exemples ci-dessous.

Exemple 1 : Combien de vendredi 13 en 2011 ?

La lettre dominicale de 2011 est *B*. Qu'est ce que ça signifie et quelles sont les conséquences ?

Les sept jours de la semaine :

Le principe est simple : à partir du 1^{er} janvier, on fait correspondre une lettre de l'alphabet de *A* à *G* à chaque jour de l'année, en recommençant la série des 7 lettres. Ainsi à chaque jour de la semaine est attribuée une lettre. Par convention, *A* qui est la *lettre fériale* de janvier, correspond au jour de la semaine le 1^{er} janvier.

En 2011, le 1^{er} janvier est un samedi, la lettre *A* est donc liée au samedi. Le début du calendrier est représenté dans le tableau (1) :

janvier	1	2	3	4	5	6	7
lettre	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
Jour	samedi	dimanche	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi

janvier	8	9	10
lettre	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
Jour	samedi	dimanche	lundi

La *lettre dominicale*, lettre correspondant au dimanche et en particulier au premier dimanche de l'année, est *B*.

Si on connaît la lettre dominicale d'une année, on en déduit la correspondance des 7 lettres de *A* à *G* avec le jour de la semaine.

Les lettres fériales de l'année

La *lettre fériale* d'un mois est la lettre correspondant au premier jour du mois.

A est la lettre fériale de janvier.

Comme le mois de janvier a 31 jours et que $31=7 \times 4+3$, il y a un décalage de 3 jours entre le 1^{er} janvier et le 1^{er} février. La lettre fériale de février est *D*.

Comme le mois de février dans une année commune (non bissextile) a 28 jours et que $28=7 \times 4+0$, le mois de mars commence par le même jour que février. La lettre fériale de mars est *D*.

Et ainsi de suite, il est alors facile de connaître la lettre fériale de chaque mois en procédant mois par mois ou en calculant le reste de la division du nombre de jours depuis le 1^{er} janvier par 7.

Les lettres fériales de l'année sont :

A-D-D-G-B-E-G-C-F-A-D-F

Dans le manuscrit de Denoville, traité de navigation de 1760, plusieurs moyens simples permettent de retrouver la lettre fériale du mois :

- avec un disque appelé volvelle
- avec des moyens mnémotechniques
- avec les mains

¹ Autres informations : Nombre d'or, Epacte -voir Les CC n° 136 déc. 2011.

Exemple 2 : Combien de vendredi 13 en 2012 ?

Les lettres dominicales de 2012 sont AG.

L'année 2012 a 2 lettres dominicales car c'est une année bissextile.

Le mois de février a 29 jours et $29 = 7 \times 4 + 1$. Ce jour supplémentaire provoque un décalage d'un jour à partir du 1^{er} mars. Pour garder les mêmes lettres fériales tout au long de l'année, on change la lettre dominicale à partir du mois de mars.

Ainsi, en janvier et février 2012, la lettre dominicale est A ce qui signifie que le 1^{er} janvier est un dimanche.

A partir du 1^{er} mars la lettre dominicale devient G, dimanche est alors lié à la lettre G.

En 2012, voilà la correspondance des jours et des lettres :

Lettres	A	B	C	D	E	F	G
Janv-fev	dimanche	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Autres mois	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche

Sachant cela, l'exemple 2 se traite comme l'exemple 1. Plus exactement comme deux fois l'exemple 1, d'abord pour les mois de janvier et février puis pour les autres mois.

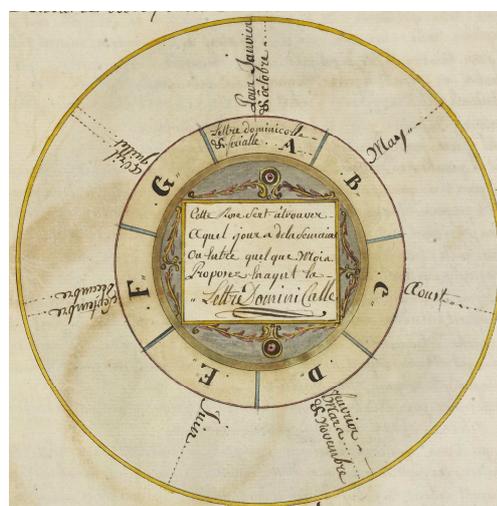
A l'aide de la volvelle :

-En janvier & février 2012

Comme la lettre dominicale est A. Janvier commence par un dimanche. Le 13 janvier est un vendredi.

-A partir de mars 2012 :

La lettre dominicale devient G. Les mois qui ont une lettre fériale G sont avril et juillet. Ces mois commencent par un dimanche. Donc, le 13 avril et le 13 juillet sont des vendredis.



En 2012, il y a 3 vendredi 13, le 13 janvier, le 13 avril et le 13 juillet.

II- Compléments

Dans l'exemple 1, on a défini d'une part, les lettres fériales, et d'autre part, le lien entre le jour de la semaine et le quantième d'un mois d'une année.

Quel est le lien entre le jour de la semaine, par exemple le dimanche ou la lettre dominicale, et l'année ?

1. Cycle solaire

Passage d'année 2011-2012 et jour de la semaine

-En 2011, la lettre dominicale est B.

La lettre A est liée au samedi qui est le jour du 1^{er} janvier 2011 :

Comme l'année 2011 est non bissextile, elle est composée de 52 semaines de 7 jours plus un jour car :

$$365 = 7 \times 52 + 1.$$

En 2011, il y a un décalage d'un jour et donc, le 1^{er} janvier 2012 est un dimanche.

-En 2012, année bissextile, les lettres dominicales sont AG

La lettre A est liée au dimanche jusqu'au 29 février, puis à partir du 1^{er} mars, la lettre dominicale est G :

Le 1^{er} janvier 2012 est un dimanche et la lettre dominicale est A en ce début d'année. La ligne « jour » du tableau (1) doit être permuté d'un rang vers la gauche.

De plus, comme 2012 est une année bissextile, le mois de février a 29 jours et $29 = 7 \times 4 + 1$. Ce jour supplémentaire provoque en cours d'année une deuxième permutation dans le tableau (1) pour garder les mêmes lettres fériales tout au long de l'année. Ainsi, à partir de mars, la lettre dominicale devient G. La lettre fériale de mars, qui est D, est un jeudi.

En 2012, il y a un décalage de 2 jours et donc, le 1^{er} janvier 2013 est un mardi.

Sur plusieurs années consécutives d'un même siècle,

Plus généralement, pour un jour donné, la lettre qui lui correspond est décalée d'un rang après chaque année commune et de deux rangs après chaque année bissextile. En commençant par les lettres dominicales BA de 2000, année bissextile, et en écrivant celles des années consécutives suivantes, on obtient :

.....BA G F E DC B A G FE D C B AG F E D CBA G F ED C B A GF E D C BA G F E

Il faut 28 ans (4×7) pour retrouver le même calendrier. Ce cycle est le **cycle solaire**.

Le cycle solaire est le nombre d'années nécessaires pour retrouver les jours de la semaine aux mêmes dates de l'année. Le cycle solaire est de 28 ans en général*. A chaque année est associé le rang du cycle solaire de 1 à 28, appelé aussi cycle solaire.

*s'il n'y a pas d'année séculaire non bissextile.

Le rang du cycle solaire permet de trouver la (ou les) lettres dominicales d'une année. On peut alors en déduire la correspondance avec tous les autres jours.

2. Calcul du cycle solaire S

En sachant que l'année² 4713 avant notre ère a un cycle solaire de 1 ou en ajoutant 9 aux années de notre ère, le reste de la division du nombre d'années obtenu par 28 donne le cycle solaire de l'année.

Comment trouve-t-on le cycle solaire d'une année ?

On le trouve en ajoutant 9 aux années de notre Seigneur, c'est à dire, qu'on suppose qu'en l'année de l'incarnation de notre Seigneur J.C., il y avait 9 de cycle solaire. On divise la somme par 28, le quotient de la division fera connaître les révolutions qui se seront écoulées depuis J.-C.(D.17)

Formule :

Le cycle solaire S d'une année m est le reste de la division de $m+9$ par 28 :
 $m+9 \equiv S [28]$ ($m+9$ est congru à S modulo 28)
Si $S = 0$, on prend $S = 28$ de cycle solaire

On peut en déduire deux choses :

Le cycle solaire est indépendant des calendriers julien et grégorien. Il ne dépend que de l'année.

Le cycle solaire pour les années bissextiles est de la forme $4p+1$, car $m+8$ est multiple de 4.

Le cycle solaire S est alors égal à 1, 5, 9, 13, 17, 21 ou 25.

Faire une division par 28 n'est pas simple.

Les personnes vivant au 18^e siècle, contournaient le problème en prenant 1 comme cycle solaire de 1700 :

Ne savez-vous pas de méthode plus aisée de trouver le cycle solaire ?

Retranchez les mille et les cents de l'année proposée ajouter 1 aux années restantes et vous aurez le cycle solaire si le nombre est en dessous de 28 ans mais si elle est au dessus de 28 ans, 56 ou 84 retranchez un de ces 3 nombres et ce qui restera sera le cycle solaire, s'il ne reste rien, le cycle solaire sera 28.

Avec une écriture moderne du texte de Denoville

$$m + 9 \equiv S [28] \quad (1)$$

si $1700 \leq m < 1799$ le nombre de centaines est : $c = 17$ et $m = 100 \times c + u$

(1) est équivalent à : $(100 \times 17 + 9) + u \equiv S [28]$

Comme 1 est le cycle solaire de 1700,

$$u + 1 \equiv S [28]$$

Ainsi par exemple en 1747, ajoutons 1 à 47, on a 48 en ôtant 28, il reste 20 pour le cycle solaire (D.17)

On peut utiliser cette méthode pour un autre siècle en calculant préalablement le cycle solaire de 1800, 1900, etc.

² La période julienne égale au produit du cycle de Méton, du cycle solaire et de l'indiction romaine ($=19 \times 28 \times 15$) débute en 4713 avant Jésus Christ. Cette année-là, les 3 cycles étaient de 1.

Exemple de calcul du cycle solaire à la manière de Denoville

En l'année 2012, on demande combien on aura de cycle solaire.
 Année proposée 2012
 Dont on ajoute 9
 Produit 2021
 On pose la division de 2021 par 28 et on obtient
 72 révolutions et 5 de reste
 R : nous avons 5 de cycle solaire en l'année 2012

3. Les lettres dominicales selon les siècles cycle solaire S

Avant la réforme grégorienne

Jusqu'à la réforme du calendrier en 1582, la correspondance entre cycle solaire et lettres dominicales était immuable, pensait-on. Pour les années séculaires, de 1000 à la réforme du calendrier grégorien, on obtient le tableau suivant :

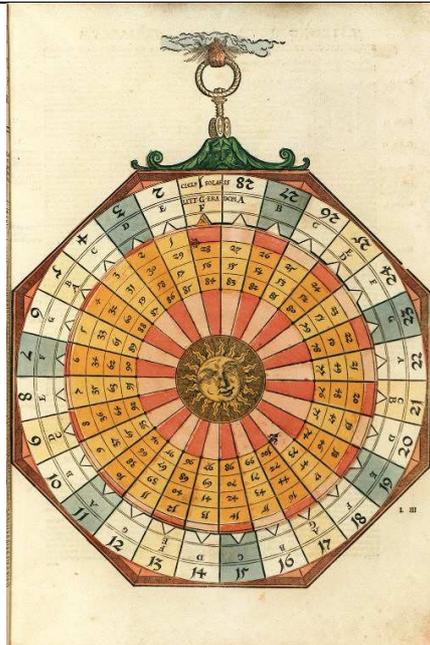
année	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1582
S	1	17	5	21	9	25	23
L.D.	G(F)	A(G)	B(A)	C(B)	D(C)	E(D)	F(E)

Comme $100 = 28 \times 3 + 16$, à chaque nouvelle année séculaire on ajoute 16 (ou on retranche 12) modulo 28 à S.

La volvelle de l'*Astronomie des Césars* d'Apian est réglée, sur la photo, pour l'an 1000. L'an 1000 a pour cycle solaire 1 et pour lettre dominicale G(F). On peut ainsi connaître la lettre dominicale pour toutes les années de 1000 à 1100.

Il suffit de prendre le nombre formé des dizaines et des unités de l'année dans la spirale au centre et la colonne renvoie au cycle solaire et à la (ou les) lettre(s) dominicale(s) de l'année. L'an 1100 a pour cycle solaire 17 et pour lettre dominicale A(G). En réglant le disque mobile sur 17 (mettre la dent avec la croix X précédent 1 sur la spirale en face de 17), le cycle solaire et la (ou les) lettre(s) dominicale(s) sont donnés de 1100 à 1200. On peut procéder ainsi pour les autres siècles ou lire directement le cycle solaire des années séculaires donné dans un tableau, à la page précédente, de 7000 avant J.-C. à 7000 après !

Par exemple, pour 1400 régler la dent avec le X sur 9, cycle solaire de 1400. On obtient bien D(C) de lettre dominicale. Sur la volvelle proposée par Apian, la lettre dominicale est liée uniquement au cycle, ce qui n'est plus vrai depuis 1582 car elle est liée aussi au siècle..



Astronomie des Césars, Pierre Apian, 1540

Après la réforme grégorienne

Depuis la réforme grégorienne, les années séculaires non bissextiles créent un décalage et la correspondance est valable au plus sur 2 siècles.

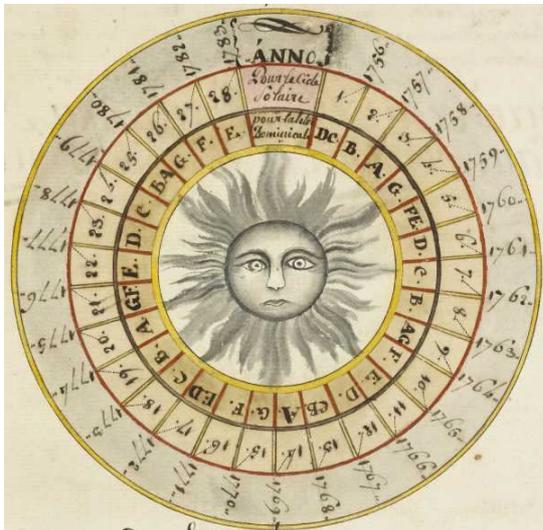
En 1582, de cycle solaire 23, on est passé directement du dimanche 9 décembre au lundi 20 décembre en France, avec la réforme du calendrier grégorien. Pas de décalage de jours pour une différence de durée de 10 jours. En 1583 de cycle solaire 24, en gardant la même correspondance et donc la lettre dominicale F, le premier dimanche devait tomber le 6 janvier, alors que c'est le 2 janvier qui fut un dimanche. Cette année-là, la lettre dominicale F devint B !

Comme 1600, de cycle solaire 13, est une année bissextile (donc pas de problème !), le tableau de correspondance cycle solaire / lettre dominicale devient **de 1583 à 1699** :

LETTRE DOMINICALE				CYCLE SOLAIRE			
<i>C(B)</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	<i>F</i>	1	2	3	4
<i>E(D)</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	5	6	7	8
<i>G(F)</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	9	10	11	12
<i>B(A)</i>	<i>G</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	13	14	15	16
<i>D(C)</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	17	18	19	20
<i>F(E)</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	21	22	23	24
<i>A(G)</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	25	26	27	28

L'année 1700, de cycle solaire 1, est la première année séculaire non bissextile. La lettre dominicale, qui est *C*, est donc unique (année de 365 jours, donc le décalage est seulement de 1 jour). Le tableau correspond à la main dessinée par Denoville qui illustre une méthode pour obtenir la lettre dominicale d'une année. Pour les lettres dominicales, Denoville utilise les doigts de la main ou une volvelle

Volvelle du cycle solaire et des lettres dominicales pour les années de 1756 à 1783



D.17:

Le cycle solaire et les lettres dominicales se lisent directement sur cette volvelle.

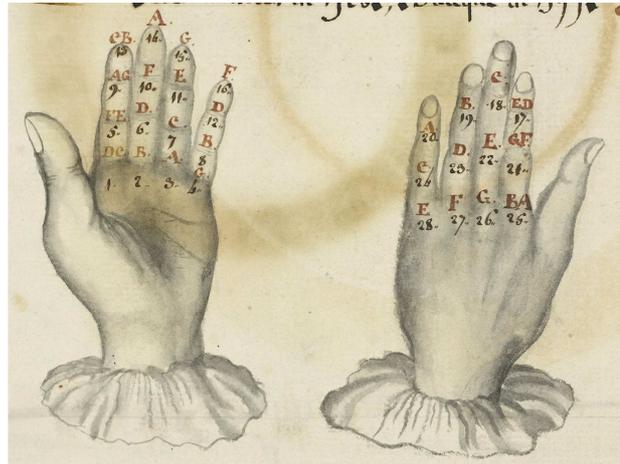
Par exemple : quelle est la lettre dominicale de 1765 ? Le cycle solaire peut être lu ou calculé. Il est de 10. On repère sur la main où est la jointure correspondant à 10. Puis en procédant comme ci-dessus, en récitant les mots latins, on trouve pour un cycle de 10, la lettre dominicale *F*.

Lettres dominicales avec les doigts de la main

De façon très pratique, Denoville remplace le tableau et les 4 colonnes par les quatre doigts (sans le pouce) de la main gauche. Les 28 positions sont les racines, les jointures et les bouts des 4 doigts utilisés d'abord à l'intérieur de la main (4 × 4 = 16) puis, à l'extérieur sans les bouts de doigts (4 × 3 = 12).

En commençant par *DC*, lettres dominicales correspondant au cycle solaire 1, sur la racine intérieur de l'index, on dit les lettres à rebours (*D, C, B, A, G, F, E, D, ...*) en prenant 2 lettres successives sur l'index. Denoville propose de réciter jusqu'à la position du cycle solaire, les mots latins suivants : *Dei, Coelum, Bonus, Accipe, Gratis, Filius, Esto, Dei, ...*

D.18



Les années 1800 et 1900 sont des années séculaires non bissextiles, donc pour chacune d'elle, il y a un décalage de 1 jour.

Avec les doigts de la main, pour trouver les lettres dominicales du 20^e et 21^e siècles, il faut commencer par *F(E)*, lettres dominicales correspondant au cycle solaire 1, sur la racine intérieur de l'index, puis en disant les lettres à rebours *F, E, D, C, B, A, G, F, E, D, ...* tout en prenant deux lettres successives sur l'index, aller jusqu'à la position du cycle solaire de l'année. La dernière lettre dite est la lettre dominicale de l'année.

Cela revient à faire le tableau suivant valable de 1900 à 2099

LETTRE DOMINICALE				CYCLE SOLAIRE			
<i>F(E)</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	1	2	3	4
<i>A(G)</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	5	6	7	8
<i>C(B)</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	<i>F</i>	9	10	11	12
<i>E(D)</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	13	14	15	16
<i>G(F)</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	17	18	19	20
<i>B(A)</i>	<i>G</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	21	22	23	24
<i>D(C)</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	25	26	27	28

En 2012 de cycle solaire 5, les lettres dominicales sont AG.

4. Nombre de vendredi une année donnée

On a vu dans l'exercice 1 que trouver un vendredi 13 revient à trouver les mois qui commencent par un dimanche.

-Pour une année non bissextile,

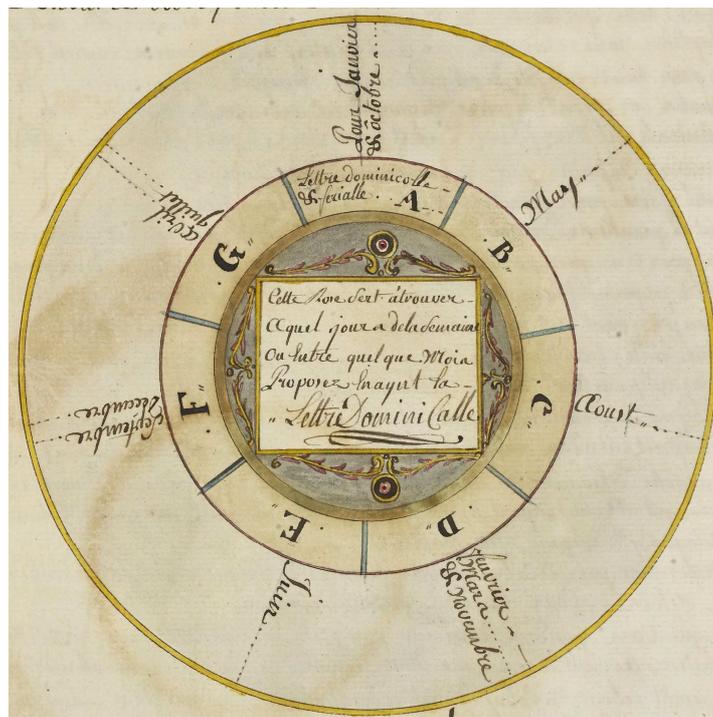
la volvelle donne directement le nombre de vendredi 13, qui correspond au nombre de mois qui ont une lettre fériale correspondant à la lettre dominicale de l'année.

Par exemple : L'année 2009 qui a un cycle solaire de 2 et de lettre dominicale *D* a 3 vendredi 13, le 13 février, le 13 mars et le 13 novembre.

-Pour les années bissextiles,

le tableau ci-dessous donne les mois qui ont un vendredi 13 (ou un dimanche 1^{er} jour du mois). La 1^{ère} lettre dominicale est pour les mois de janvier & février, la 2^{ème} est pour les autres mois de l'année. On obtient alors le nombre de vendredi 13 pour chacune de ces années :

<i>L.D</i>	<i>AG</i>	<i>GF</i>	<i>FE</i>	<i>ED</i>	<i>DC</i>	<i>CB</i>	<i>BA</i>
Janv&fev	janvier				février		
autres	Avr. &juill	Sept & dec	juin	Mars & nov.	août	mai	octobre
Nombre de vendredi 13	3	2	1	2	1	1	1



Il est donc possible, connaissant l'année, de déterminer le cycle solaire et la ou les lettres dominicales. Puis, en s'aidant de la volvelle, on a tous les vendredi 13 de l'année.