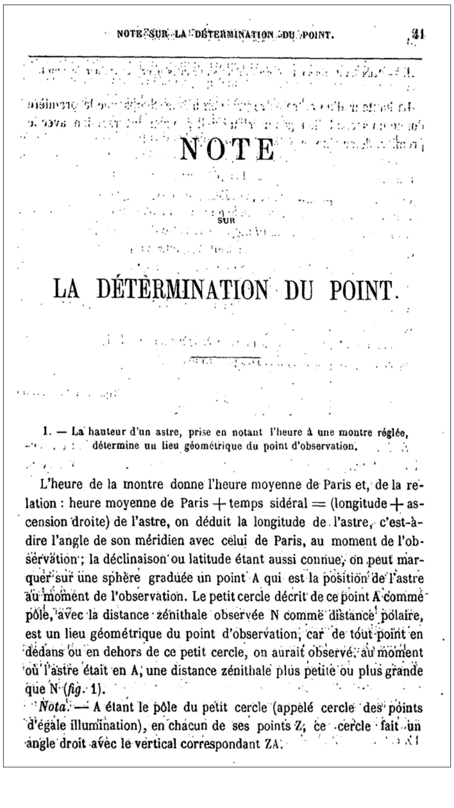
Dans ce document, le lecteur trouvera les deux articles d'**Adolphe Marcq de Blond de Saint Hilaire** consacrés à la détermination du point en mer, publiés dans la *Revue Maritime et Coloniale du ministère de la marine et des colonies.*

- Marcq de Saint Hilaire, Notes sur la détermination du point, *Revue Maritime et Coloniale*, tome 39, p. 41-58, Paris, 1873.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34526m?rk=42918;4 p. 2

- Marcq de Saint Hilaire, Calcul du point observé : Méthode des hauteurs estimées et Point moyen donné par trois observations, *Revue Maritime et Coloniale*, tome 46, p. 341-376 & p. 714-742, Paris, 1875.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34533w?rk=64378;0 p. 20



NOTE SUR LA DÉTERMINATION DU POINT. 41

NOTE

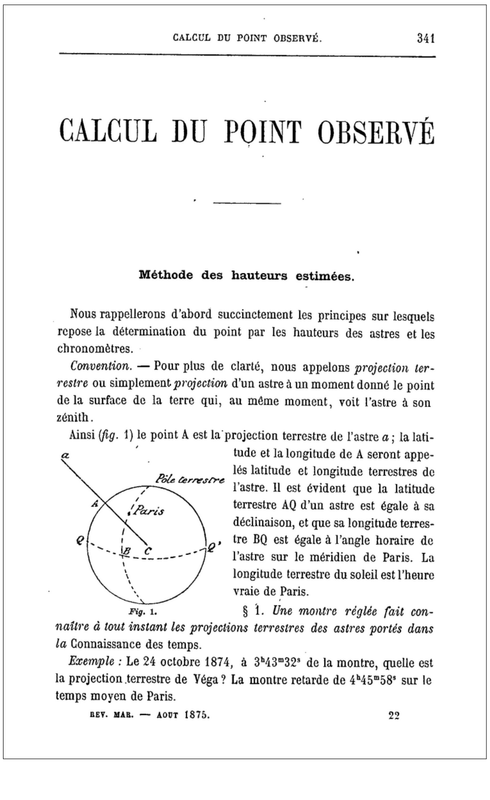
SUR

LA DÉTERMINATION DU POINT.

1. — La hauteur d'un astre, prise en notant l'heure à une montre réglée, détermine un lieu géométrique du point d'observation.

L'heure de la montre donne l'heure moyenne de Paris et, de la relation : heure moyenne de Paris + temps sidéral = (longitude + ascension droite) de l'astre, on déduit la longitude de l'astre, c'est-à-dire l'angle de son méridien avec celui de Paris, au moment de l'observation ; la déclinaison ou latitude étant aussi connue, on peut marquer sur une sphère graduée un point A qui est la position de l'astre au moment de l'observation. Le petit cercle décrit de ce point A comme pôle, avec la distance zénithale observée N comme distance polaire, est un lieu géométrique du point d'observation, car de tout point en dedans ou en dehors de ce petit cercle, on aurait observé, au moment où l'astre était en A, une distance zénithale plus petite ou plus grande que N (*fig.* 1).

Nota. — A étant le pôle du petit cercle (appelé cercle des points d'égale illumination), en chacun de ses points Z, ce cercle fait un angle droit avec le vertical correspondant ZA.



CALCUL DU POINT OBSERVÉ. 341

CALCUL DU POINT OBSERVÉ

Méthode des hauteurs estimées.

Nous rappellerons d'abord succinctement les principes sur lesquels repose la détermination du point par les hauteurs des astres et les chronomètres.

Convention. — Pour plus de clarté, nous appelons *projection terrestre* ou simplement *projection* d'un astre à un moment donné le point de la surface de la terre qui, au même moment, voit l'astre à son zénith.

Ainsi (*fig.* 1) le point A est la projection terrestre de l'astre *a* ; la latitude et la longitude de A seront appelés latitude et longitude terrestres de l'astre. Il est évident que la latitude terrestre AQ d'un astre est égale à sa déclinaison, et que sa longitude terrestre BQ est égale à l'angle horaire de l'astre sur le méridien de Paris. La longitude terrestre du soleil est l'heure vraie de Paris.

a
Pôle terrestre
A
Paris
Q
B
C
Q'

Fig. 1.

§ 1. *Une montre réglée fait connaître à tout instant les projections terrestres des astres portés dans la* Connaissance des temps.

Exemple : Le 24 octobre 1874, à $3^h43^m32^s$ de la montre, quelle est la projection terrestre de Véga ? La montre retarde de $4^h45^m58^s$ sur le temps moyen de Paris.

REV. MAR. — AOUT 1875. 22

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DU POINT.

I. — **La hauteur d'un astre, prise en notant l'heure à une montre réglée, détermine un lieu géométrique du point d'observation.**

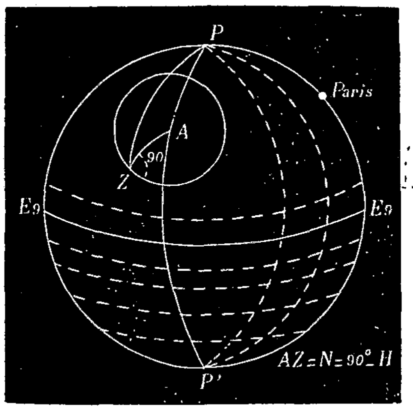
L'heure de la montre donne l'heure moyenne de Paris et, de la relation : heure moyenne de Paris + temps sidéral = (longitude + ascension droite) de l'astre, on déduit la longitude de l'astre, c'est-à-dire l'angle de son méridien avec celui de Paris, au moment de l'observation ; la déclinaison ou latitude étant aussi connue, on peut marquer sur une sphère graduée un point A qui est la position de l'astre au moment de l'observation. Le petit cercle décrit de ce point A comme pôle, avec la distance zénithale observée N comme distance polaire, est un lieu géométrique du point d'observation, car de tout point en dedans ou en dehors de ce petit cercle, on aurait observé, au moment où l'astre était en A, une distance zénithale plus petite ou plus grande que N (*fig.* 1).

Nota. — A étant le pôle du petit cercle (appelé cercle des points d'égale illumination), en chacun de ses points Z, ce cercle fait un angle droit avec le vertical correspondant ZA.

II. — Deux hauteurs sont nécessaires et suffisantes pour déterminer le point.

La hauteur d'un autre astre prise en même temps que la première donne un second lieu géométrique qui, par son intersection avec le premier, détermine le point d'observation.

Fig. 1.



Nota. — Les deux cercles, étant à leur point d'intersection respectivement perpendiculaires aux verticaux des deux astres observés, font entre eux le même angle que ces verticaux.

III. — Tracer sur la carte le lieu géométrique donné par une hauteur.

Une approximation suffisante étant impossible avec les dimensions forcément réduites d'une sphère, on ne peut employer la construction indiquée ci-dessus, qui n'exige aucun calcul, et l'on est amené à tracer sur la carte même les projections des deux cercles qui, par leur intersection, déterminent le point.

Dans chacun des triangles PAZ, formés par le pôle, l'astre et les différents points Z du cercle, deux éléments PA et AZ sont constants et respectivement égaux à la distance polaire de l'astre et à la distance zénithale observée ; en donnant une valeur à l'un des éléments PZ ou angle APZ, on peut calculer l'autre par la résolution du triangle. Or PZ est la colatitude du point Z, angle APZ est égal à la longitude de c, point diminué de la longitude de l'astre ; par suite, en se donnant à volonté l'une des coordonnées, latitude ou longitude, des différents points Z, on peut calculer l'autre, puis porter sur la carte les points ainsi obtenus, et tracer point par point la courbe qui est la projection cherchée du cercle.

Il suffit de tracer cette projection dans les limites suffisantes pour contenir à coup sûr le point d'observation.

IV. — Les deux lieux géométriques donnés par deux hauteurs se coupent sur la carte sous un angle égal à celui des verticaux d'observation.

Cela découle évidemment de la propriété de la projection, adoptée pour les cartes réduites, de conserver aux angles leur valeur (§ 2).

Nota. — En chacun de ses points, la projection d'un petit cercle est perpendiculaire au vertical correspondant.

V. — Choix du calcul de latitude ou de longitude.

On a vu que pour tracer la courbe point par point, l'on se donnait à volonté une des coordonnées, latitude ou longitude, des différents points Z et que l'on calculait l'autre. Le choix de la coordonnée que l'on se donne n'est pas indifférent ; la partie de la courbe que l'on veut tracer a une direction Nord et Sud lorsque l'observation a été faite à l'Est ou à l'Ouest, c'est-à-dire au premier vertical ; elle s'écarte de cette direction à mesure que l'observation s'écarte du premier vertical et elle devient Est ou Ouest lorsque l'on a observé au méridien.

Si, pour une observation faite dans les environs du premier vertical, on prenait la longitude estimée pour en déduire la latitude, le point que l'on obtiendrait serait l'intersection du méridien de la longitude adoptée avec la ligne à déterminer, qui se dirige elle-même presque Nord et Sud ; l'intersection aurait lieu sous un angle très-aigu et le point trouvé s'écarterait considérablement du point exact pour la plus petite différence entre la longitude vraie et celle du calcul.

Il faut donc, dans le cas d'une observation dans les environs du premier vertical, prendre les latitudes et faire des calculs de longitude. L'inverse a lieu pour une observation prise dans les environs du méridien.

En résumé, pour les observations plus près du méridien que du premier vertical, faire des calculs de latitude ; pour les observations plus près du premier vertical que du méridien, faire des calculs de longitude.

Le calcul de longitude, étant plus usuel, peut sans inconvénient s'employer jusqu'à 30° du méridien.

La méridienne, les circumméridiennes d'un astre, la hauteur de la polaire déterminent un parallèle de latitude. Le calcul est simplifié, mais n'est qu'approximatif pour les circumméridiennes et la polaire.

VI. — Tracé pratique d'une hauteur.

Dans la pratique, on se contente de calculer deux points déterminant une corde de la courbe de projection cherchée que l'on considère comme la courbe elle-même. On peut même ne calculer qu'un point et l'azimut correspondant, et mener par le point obtenu une perpendiculaire à l'azimut, qui est la tangente à la courbe en ce point et que l'on considère comme la courbe elle-même.

Dans le premier cas, avec deux latitudes comprenant la latitude vraie, on fait deux calculs de longitude ; on marque les deux points obtenus que l'on réunit par une droite. Si la hauteur est voisine du méridien, on calcule deux latitudes avec deux longitudes comprenant la longitude vraie.

Dans le second cas, avec la latitude ou la longitude estimée, on calcule la longitude ou la latitude ainsi que l'azimut, et par le point obtenu on trace une perpendiculaire à l'azimut.

VII. — Formules à employer.

Voici les formules qui paraissent les plus simples :

1° Pour un calcul de longitude et d'azimut

$$2S = L + \Delta + H$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} P = \frac{\cos S \sin (S - H)}{\cos L \sin \Delta}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} Z = \frac{\sin (S - H) \sin (S - L)}{\cos L \cdot \cos H}.$$

2° Pour un calcul de latitude et d'azimut

$$\sin Z = \frac{\sin P \times \sin \Delta}{\cos H} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\Delta \cos P, \ \operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{cotg} H \cos Z \qquad (2)$$

$$\varphi = PK, \quad \varphi' = ZK,$$

$$L = 90^\circ - (\varphi + \varphi')$$

(1) Faire attention à la valeur de Z qui n'est donné que par son sinus, et qui doit toujours être compté à partir du pôle supérieur.

(2) Faire attention aux signes de φ et de φ' qui sont négatifs lorsque P ou $Z > 90^\circ$.

VIII. — L'emploi de la corde ou de la tangente donne une approximation bien suffisante.

On peut s'en rendre compte en traçant exactement la courbe dans différents cas par trois ou quatre points. Rien n'empêche d'agir toutes les fois qu'on veut une plus grande exactitude.

Si le point estimé est très-erroné, ce que l'on reconnaît parce que le point d'intersection des droites est très-éloigné de ceux qui ont servi à les tracer, on recommence le calcul avec le point trouvé, comme nouveau point estimé.

Quand la distance zénithale, dont il s'agit de tracer le résultat, est petite, le petit cercle étant décrit avec une distance polaire petite, a une courbure plus prononcée, et on fait bien de calculer trois points, si on veut une grande exactitude (A).

IX. — Tracer le résultat d'une hauteur se rapprochant de 90°.

Une distance zénithale de 1° et au-dessous peut se tracer sur la carte comme on le ferait sur la sphère : on détermine sur la carte la position de l'astre et du point obtenu comme centre ; avec la distance zénithale mesurée sur l'échelle des latitudes comme rayon, on décrit un cercle qui est la projection cherchée. Dans les environs de l'équateur où les minutes de longitude varient insensiblement, cette construction peut s'étendre à des distances zénithales un peu plus grandes que 1°.

(A) La tangente ou la corde s'écarte d'autant plus de la projection exacte du cercle, que la variation $d.Z$ de l'azimut du point calculé est considérable pour un même déplacement, m milles, de ce point sur le cercle. Soit Z le point calculé, Z' le point distant de m milles, sur le cercle (*fig.* 2).

On a $Z'R = d.Z = ZZ' \sin. RZZ' = m. \sin. Z.$

X. — Ramener le résultat d'une hauteur à un moment donné.

Deux observations simultanées donnent le point par l'intersection des lignes qu'elles déterminent. Si les hauteurs ne sont pas simulta-

---

On a $\cos. L. \cos. H. \cos. Z = \cos. \Delta - \sin. L \sin. H$, d'où en différenciant par rapport à Z et à L, puisque Δ et H sont constants, on a :

$$d\,.\,Z\,(\cos L \cos H \sin Z) = d\,.\,L\,(\cos L \sin H - \sin L \cos H \cos Z),$$

or

$$\operatorname{cotg} P \sin Z = \operatorname{tg} H \cos L - \sin L \cos Z,$$

d'où

$$\sin H \cos L - \sin L \cos H \cos Z = \operatorname{cotg} P \sin Z \cos H\,;$$

remplaçant dans la valeur de dZ et simplifiant, on a

$$dZ \times \cos L = dL \times \operatorname{cotg} P\,;$$

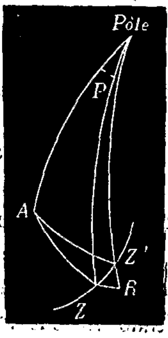
or

$$dL = m \sin Z,$$

donc

$$dz\,\frac{m}{\cos L} \times \frac{\sin Z}{\operatorname{tg} P} = \frac{m}{\cos L} \times \frac{\sin \Delta}{\cos H} \times \cos P.$$

Fig. 2.

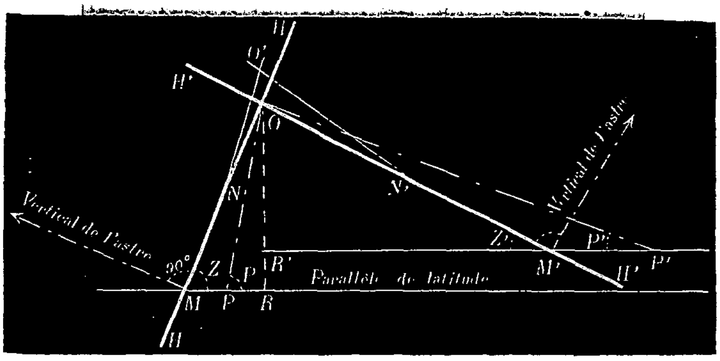


De cette dernière valeur de dZ, on conclut que la variation de l'azimut, pour un même déplacement du point Z sur le cercle, est d'autant plus petite que L et H sont petits et que P se rapproche de 90°. Pour les hauteurs horaires, P est généralement grand et H petit, la projection du cercle se rapproche d'une ligne droite ; pour les hauteurs prises dans les environs du méridien, P est généralement petit et H grand. C'est dans cette circonstance qu'il y a lieu de tenir compte des variations de l'azimut en faisant un autre calcul ou en employant la construction suivante :

nées, on ramène les résultats obtenus au moment où l'on veut le point, en transportant les lignes parallèlement à elles-mêmes selon le chemin parcouru dans l'intervalle écoulé entre le moment où elles ont été prises et celui où l'on veut le point; exemple :

Soit H,H' deux hauteurs tracées au moyen des points *m,m'* des azimuts Z,Z' et déterminant le point O ; on veut tenir compte de la courbure des projections des deux cercles tangents aux droites en M,M'.

Fig. 3.



MO représente le déplacement du point M ; OR est égal à $d \cdot L$, et, mesuré sur l'échelle des longitudes, est égal à $\frac{dL}{\cos L}$. En faisant l'angle OPR égal à P, on a $PR = \frac{OR}{\operatorname{tg} P} = \frac{d \cdot L}{\cos L \operatorname{tg} P} = d \cdot Z$.

PR, mesuré sur l'échelle des longitudes, donne en minutes la variation de l'angle Z, c'est-à-dire que la courbe de projection coupe le parallèle passant par O sous l'angle $dZ + Z$. En menant par N, milieu de MO, une droite NO' faisant avec NO l'angle dZ minutes, on obtient un second élément de la courbe. En agissant de même pour la seconde hauteur, on détermine le point corrigé O'.

On ne peut se tromper sur le sens de dZ qui est du même signe que dL ou de signe contraire, selon que $P < \text{ou} > 90°$.

Quand P égale 90°, la courbure change de sens et c'est en ce point d'inflexion que la courbe se rapproche le plus de la ligne droite.

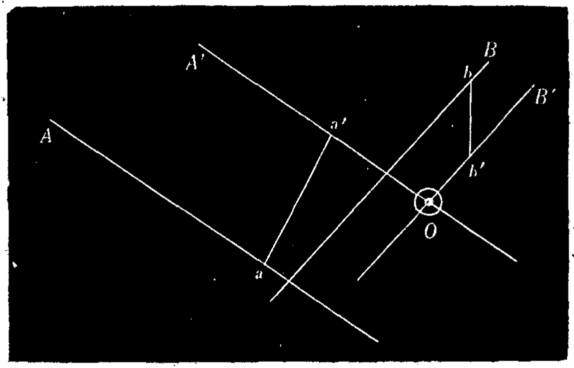
Au lieu de construire l'angle $OPR = P$, on peut se servir de la table de point dans laquelle on entre avec OR en minutes de longitude comme chemin Est et Ouest, l'angle P comme angle de route ; le chemin Nord et Sud donne dZ en minutes.

Dans le cas où les droites H et H' sont des cordes au lieu d'être des tangentes, on peut employer une construction analogue, et tracer les deux éléments de la courbe aux deux points qui ont déterminé la corde.

On a observé à 10 heures 1/2 du matin et à 1 heure du soir ; on veut le point à midi. De 10 heures 1/2 à midi, fait 12 milles au N.-N.-E. ; de midi à 1 heure fait 5 milles au Nord.

La figure s'explique d'elle-même. Si à 10 heures 1/2 on était sur la ligne A, à midi on est évidemment sur la ligne A'.

Fig. 4.



Signe : A Observation de 10 heures ½.
aa' = 12 milles au N.-N.-E.
A Observation de 10 heures ½ ramenée à midi.
B Observation de 1 heure.
bb' = 5 milles au Sud.
B' Observation de 1 heure ramenée à midi.
O Point de midi.

Nota. — Les hauteurs sont considérées comme simultanées toutes les fois que le déplacement du bâtiment dans l'intervalle des observations est négligeable. S'il en est autrement, il faut tenir compte de ce déplacement.

XI. — Cas de plusieurs hauteurs.

Quand on a observé la hauteur de plusieurs astres, soit simultanément, soit à des instants différents, on les ramène au moment où l'on veut le point ; si toutes les droites ne concourent pas en un même point, ce qui a généralement lieu, on se place de sentiment, comme on le fait lorsque plusieurs relèvements ne concordent pas, en tenant compte de l'exactitude relative des hauteurs, de l'astre observé, etc.

XII. — Pour avoir un bon point.

La seule condition à remplir consiste à obtenir deux lignes, se coupant sous un angle suffisamment grand et se rapprochant de 90°.

Pour les observations simultanées, il suffit de choisir deux astres dont les verticaux satisfassent à cette condition. (Voir § 4.)

Pour les observations à intervalle, la même condition d'angle doit être remplie par les verticaux des astres observés ou de l'astre observé en deux positions différentes, et de plus les hauteurs doivent être écartées le moins possible en temps, de façon à éviter autant qu'on peut les erreurs provenant de l'estime dans l'intervalle.

Il est souvent préférable d'avoir un angle moins grand entre les verticaux compensé par un intervalle plus petit entre les hauteurs, surtout si on craint les erreurs d'estime et de courant.

Les conditions pour obtenir un bon point sont évidemment les mêmes, soit que l'on construise géométriquement, soit que l'on ait recours au calcul; il faut donc toujours se mettre dans les conditions qui viennent d'être énoncées.

Si l'on préfère le calcul, la méthode Pagel est la meilleure; on pourra éviter quelques chances d'erreur sur les signes des corrections en remarquant que, pour une observation prise entre le Nord et l'Est, par exemple, une latitude plus Nord met plus à l'Ouest et une latitude plus Sud plus à l'Est, puisque le lieu géométrique donné par la hauteur se dirige du N.-O. au S.-E.

XIII. — Pour obtenir un bon point à un moment donné.

Observer aussi près que possible de ce moment tout en satisfaisant à la condition d'angle entre les verticaux énoncés dans le paragraphe précédent.

Le matin et le soir, des hauteurs d'étoiles ou de planètes combinées avec celle du soleil donnent un excellent point. La nuit, l'incertitude des observations d'étoiles rend nécessaire de prendre un certain nombre de hauteurs d'étoiles différentes que l'on combine avec celle de la lune, si faire se peut.

Le jour, employer autant qu'on peut les observations combinées de lune et de soleil.

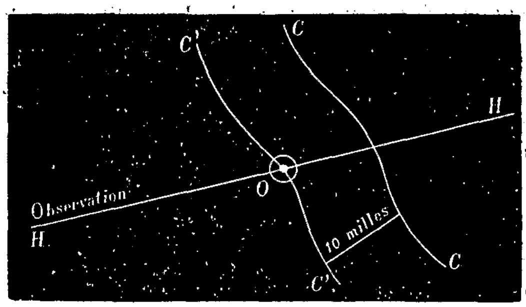
Pour midi, avec le soleil seulement, deux observations prises de chaque côté du méridien entre 30° et 45° d'azimut donnent le meilleur point possible. On a ainsi deux observations se coupant sous un angle de 60° à 90° et aussi rapprochées en temps qu'on peut les avoir.

XIV. — Parti à tirer d'une seule hauteur.

Une seule hauteur, donnant un lieu géométrique du point, détermine le point lui-même par son intersection avec un autre lieu géométrique obtenu par un relèvement, une sonde, la distance à la côte, ou par tout autre moyen. Pour avoir un bon point, ces deux lieux géométriques doivent se couper sous un angle convenable.

1er EXEMPLE. — On s'estime à 10 milles d'une côte et on a pris une observation :

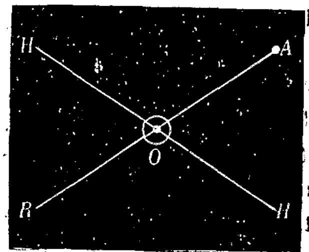
Fig. 5.



HH Hauteur.
cc Ligne de la côte.
c'c' Parallèle à la côte à 10 milles.
O Point.

2e EXEMPLE. — On a relevé un point A et observé une hauteur

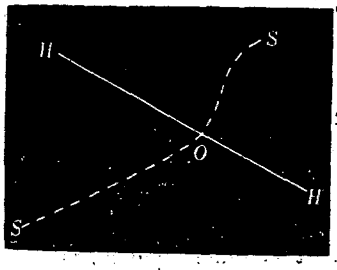
Fig. 6



AR Relèvement de A.
HH Hauteur.
O Point.

3° EXEMPLE. — On a eu une sonde de 50 mètres et pris une hauteur.

Fig. 7.



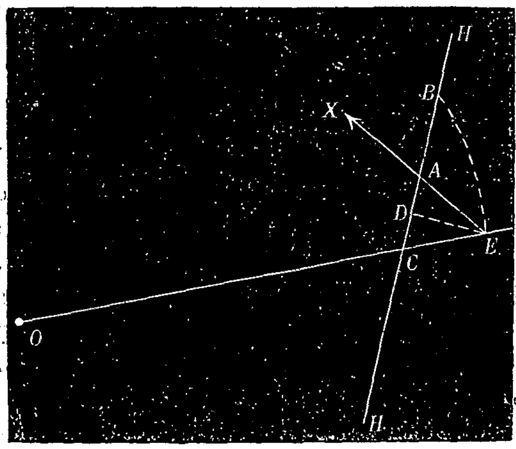
HH Hauteur.
SS Ligne des sondes de 50 mètres.
O Point.

Nota.—Le résultat d'une sonde, celui d'un relèvement, etc., peuvent se ramener, à un moment donné, par un transport parallèle, comme nous l'avons vu pour une hauteur. C'est ainsi que deux relèvements, un relèvement et une sonde pris ensemble ou à intervalle, deux sondes mêmes dans certaines localités, servent à déterminer le point qui est toujours donné par l'intersection de deux lieux géométriques.

Une seule hauteur aidée de la connaissance des courants ou des causes d'erreur sur l'estime donne la faculté d'avoir le point.

EXEMPLE. — Soit O le dernier point connu, E le point estimé au mo-

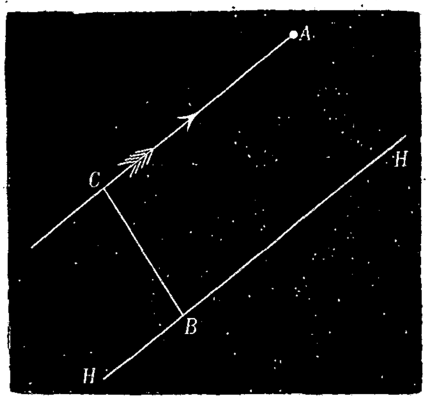
Fig. 8.



ment de l'observation H; si la direction du courant est connue, EX par exemple, et que l'estime soit bonne par ailleurs, on se place en A. Si l'erreur d'estime provient du compas et non du loch, on décrit, du point O comme centre, un arc de cercle EB, qui détermine sur la ligne H le point B, où l'on doit se placer. Si au contraire l'erreur provient de l'estimation de la vitesse, et non du cap, on doit se placer en C. Si, enfin, on n'a aucune donnée, ni sur les causes d'erreur de l'estime, ni sur les courants, on se place sur la ligne H, le plus près possible de E, au pied de la perpendiculaire en D. Il n'y a évidemment pas de certitude dans cette manière de faire, mais des probabilités dont on doit tenir compte. C'est la seule façon de faire concourir toutes les données que l'on possède à la connaissance probable du point.

Une seule hauteur permet d'atterrir à coup sûr. Exemple : Soit A le point de destination, la ligne H le résultat de la hauteur.

Fig. 9.



Mener par A une parallèle à H, rejoindre cette parallèle par une route transversale quelconque, BC, et mettre le cap sur sa destination; l'observation doit être prise dans une direction se rapprochant de la perpendiculaire au gisement présumé du lieu de destination, afin d'éviter une longue route transversale. Au moment de donner dans un détroit, passage, etc., une observation, prise dans une direction perpendiculaire à la direction du détroit, permet, par une opération semblable à la précédente, de suivre le milieu du passage.

Une hauteur prise de l'avant ou de l'arrière fait connaître, à quel point on est avancé sur la route, et si l'on a du courant pour ou contre soi; une hauteur prise par le travers fait connaître si l'on est jeté à droite ou à gauche de la route, soit par erreur du compas, soit par suite du courant. Les premières pourraient être appelées hauteurs de vitesse et les secondes hauteurs de direction.

XV. — Reconnaître une étoile observée.

Il peut arriver qu'on ne connaisse pas l'étoile qu'on a observée, parce que l'état du ciel empêche de voir les constellations; dans ce cas, et c'est une bonne précaution à prendre toujours, il faut la relever au compas; avec le point estimé et l'azimut vrai de l'étoile, résoudre grossièrement le triangle de position dans lequel PZ, ZA et Z sont connus et en conclure une valeur approchée de l'ascension droite et de la déclinaison de l'étoile observée. On voit alors dans la *Connaissance des temps* quelle est l'étoile ou planète dont les éléments se rapprochent de ceux qu'on a trouvés. Pour un angle d'azimut petit, une simple construction graphique est suffisante. Il faut naturellement avoir observé une étoile brillante pour qu'elle se trouve portée dans la *Connaissance des temps*.

Remarquons en passant que, si les relèvements au compas ainsi que la détermination de la variation pouvaient avoir une exactitude suffisante, l'observation de la hauteur d'un astre et de son relèvement donnerait le moyen de déterminer immédiatement le point.

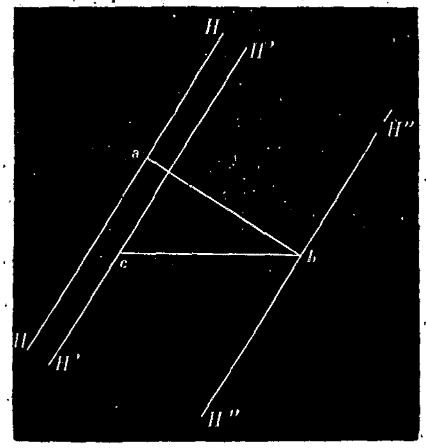
XVI. — Correction d'une erreur commise sur la hauteur employée.

Une hauteur trop grande diminue la distance zénitale et rapproche de l'astre observé, c'est-à-dire que si l'astre est dans le N.-N.-E., et que la hauteur qui sert au calcul soit trop grande de 10', la ligne O.-N.-O., E.-S.-E. que l'on détermine se trouve trop portée dans le N.-N.-E de 10 milles; il est facile de s'assurer de ce fait en se reportant à la sphère. L'inverse a lieu pour une hauteur trop petite. Si donc on s'aperçoit, après le calcul et la construction d'une hauteur, qu'une certaine erreur peu considérable a été commise sur cette hauteur, on corrige le résultat en menant une parallèle à la droite déjà tracée, à une distance, en milles, égale à l'erreur exprimée en minutes, du côté de l'astre ou à l'opposé, selon que la hauteur employée était trop petite ou trop grande.

XVII. — Le résultat d'une hauteur étant tracé, tracer sans nouveau calcul le résultat d'une hauteur voisine du même astre.

Soit H la hauteur tracée; *t* secondes le temps écoulé entre cette hauteur et la hauteur voisine qu'il s'agit de tracer et que l'on suppose prise après la première, et plus grande qu'elle de *m* minutes.

Fig. 10.

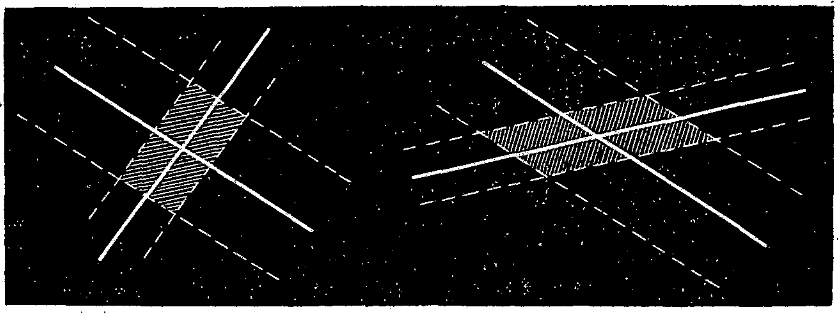


Si, pendant le temps *t*, l'astre était resté immobile, la deuxième hauteur aurait déterminé un lieu géométrique parallèle à H, mais plus rapproché de l'astre de *m* milles, c'est-à-dire qu'elle aurait donné H'' en supposant $ab = m$ milles et dirigé vers l'astre; mais comme, pendant l'intervalle *t*, l'astre, si on néglige son mouvement propre, s'est déplacé en longitude vers l'Ouest de *t* secondes, ce lieu géométrique se trouve reporté vers l'Ouest de la même différence en longitude, et en prenant sur le parallèle $bc = t$ secondes $= \frac{t}{4}$ minutes, la parallèle H' menée par *c* est le résultat de la seconde hauteur. On peut de cette façon, par un seul calcul, avoir le résultat moyen de plusieurs hauteurs voisines d'un même astre.

XVIII. — Hauteurs douteuses.

Quand on a observé une hauteur douteuse à 4' près, par exemple, dans un sens ou dans l'autre, il suffit de donner à la ligne obtenue une épaisseur de 4 milles de chaque côté, et le résultat est alors une bande large de 8 milles contenant à coup sûr le point. Si l'autre hauteur est aussi douteuse, on fait de même, et on obtient ainsi un espace limitant le point et d'autant plus étendu pour les mêmes erreurs de hauteurs que l'angle de ces hauteurs s'écarte de l'angle droit.

Fig. 11. Fig. 12.



XIX. — Erreur sur l'état de la montre.

Tout ce qui a été dit suppose que la montre est bien réglée. Si son état était faux, les résultats donnés par les observations astronomiques seules seraient exacts en latitude et erronés en longitude, de l'erreur de la montre. Pour les résultats donnés par une hauteur et par une observation terrestre, telle que sonde, relèvement, etc., il est facile de voir de quelle manière ils sont influencés par l'erreur de la montre, en transportant la droite donnée par la hauteur à l'Est et à l'Ouest, d'une quantité égale à l'erreur possible de la montre. Le résultat d'une hauteur est d'autant moins influencé par l'erreur de la montre que cette hauteur s'éloigne du premier vertical pour se rapprocher du méridien. Au méridien, l'influence est nulle.

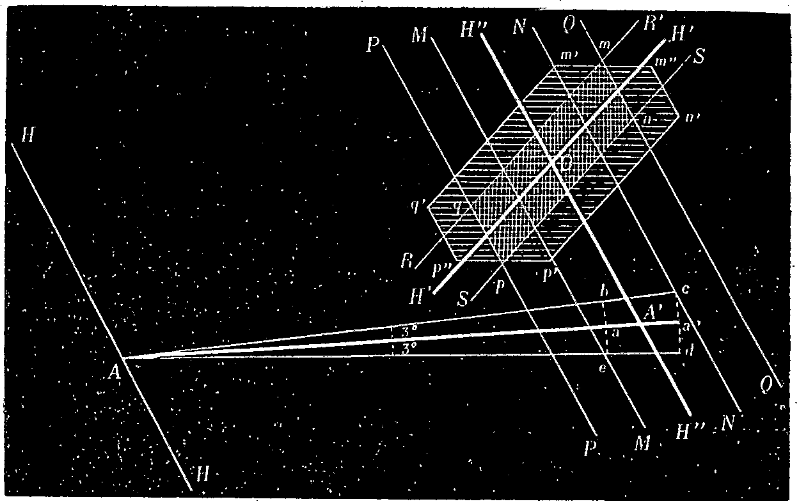
XX. — Limite d'erreur du point.

Aucun des éléments qui concourent à déterminer le point n'est parfaitement exact; tous sont entachés d'une certaine erreur et ne donnent qu'un point approximatif. En supposant sur ces éléments une limite d'erreur, on peut déterminer la limite d'erreur du point, c'est-à-dire une surface qui le contient avec certitude.

Un point obtenu par deux hauteurs à intervalle est soumis aux erreurs d'estime pendant l'intervalle, aux erreurs des hauteurs et à l'erreur de la montre. Supposons la vitesse dans l'intervalle estimée à 1/20 près et la route à 3° près ; la première hauteur prise à 1 minute 1/2 près, la seconde à 1 minute près ; l'état de la montre douteux à 5 secondes près.

Soit A un point de la première hauteur H non ramenée au moment

Fig. 13.



de la seconde ; AA', qui est supposé égal à 20 milles, la route résultante suivie dans l'intervalle. La ligne H" parallèle à H serait la première hauteur ramenée sans tenir compte d'aucune erreur. Comme la distance AA' supposée égale à 20 milles a été estimée à 1/20 près, le point A ramené se trouve limité par les points *a*,*a'* à 19 et 21 milles ; la route n'étant exacte qu'à 3° près, la surface *bcde* limite ce point ramené par l'estime au moment de la seconde hauteur.

Les parallèles à H menées par tous les points de la surface *bcde* déterminent une bande MN qui est le résultat de la première hauteur en tenant compte des erreurs possibles d'estime. Cette hauteur pouvant être erronée de 1 minute 1/2, il faut augmenter l'épaisseur de cette bande de 1 mille 1/2 de chaque côté ; on a ainsi la bande PQ pour le résultat définitif de la première hauteur. H' étant la seconde hauteur, en lui donnant l'épaisseur de 1 mille de chaque côté, on a la bande RS pour le résultat de cette hauteur.

Les deux bandes PQ, RS donnent comme limite du point la surface *mnpq* qu'il suffit de transporter à l'Est et à l'Ouest de 5 secondes ou 1',15" pour tenir compte de l'erreur de la montre et avoir ainsi comme limite définitive du point la surface *m'm''n'p'p''q'*.

Dans l'exemple choisi où toutes les erreurs sont admises dans des limites très-ordinaires, le point exact pourrait être en *p''*; comme O est le point trouvé, il pourrait être erroné de 4 milles environ; c'est l'erreur maximum. Pour qu'elle ait lieu, il faut que les erreurs sur les différents éléments aient atteint leur limite et se soient accumulées pour fausser le point dans le même sens, chose peu probable, mais possible.

Un point donné par deux hauteurs simultanées n'est soumis qu'aux erreurs des hauteurs et de la montre; aussi faut-il avoir recours à ces hauteurs ou tout au moins les rapprocher autant qu'on peut.

XXI. — Conclusion.

La théorie qui vient d'être exposée n'est pas nouvelle; les constructions graphiques sont certainement employées par beaucoup d'officiers, mais elles sont loin d'être généralisées; elles offrent cependant de grands avantages dans les circonstances surtout où la détermination du point présente quelques difficultés. Elles permettent de se rendre compte de la limite d'erreur, de faire concourir ensemble les observations terrestres et astronomiques; elles offrent la ressource de faire observer, calculer et tracer chaque hauteur par une personne différente, ce qui divise le travail et accélère le résultat; enfin, chose très-importante, la construction graphique seule donne le moyen de tirer tout le parti possible d'une hauteur isolée.

Cette théorie fait éviter certaines pratiques peu logiques dans lesquelles on est porté à tomber. Que fait-on souvent d'une seule hauteur prise hors du méridien? Avec une latitude douteuse, on calcule une longitude, que l'on regarde comme bonne, ou bien on marque le point obtenu que l'on considère comme douteux et auquel on n'accorde aucune confiance. Dans le premier cas, on fait une hypothèse fausse, quelquefois dangereuse, exacte seulement pour une observation faite strictement au premier vertical; dans le second, on néglige, ou à peu près, l'unique observation qu'on possède. N'est-il pas préférable de tracer le lieu géométrique du point donné par la hauteur? On sait tout le parti qu'on peut tirer d'un seul relèvement; c'est ici la même chose.

On semble quelquefois croire qu'à tel moment une hauteur ne peut donner de bons résultats, parce qu'une légère différence en latitude entraîne une différence considérable en longitude. Toutes les hauteurs prises dans les mêmes conditions d'exactitude sont également bonnes; un relèvement au N.-E. vaut un relèvement au Nord, quelquefois mieux. C'est la combinaison de deux hauteurs qui doit satisfaire à certaines conditions, comme la combinaison de deux relèvements, pour déterminer un bon point.

Il arrive aussi qu'avec un horizon douteux, ou un soleil embrumé, on se prive d'observations, parce qu'elles ne seraient pas suffisamment exactes. Qu'on se rende compte qu'une erreur quelconque sur la hauteur se reporte intégralement sur le résultat; que la ligne déterminée par cette hauteur passe à 10 milles du point exact si l'erreur est de 10′ et cela dans toutes les circonstances, alors on n'hésitera pas à prendre des hauteurs douteuses à 5, 6′ près, ou même plus, qui peuvent être précieuses, malgré leur incertitude.

Aujourd'hui que les grandes vitesses des bâtiments à vapeur ainsi que les déviations souvent douteuses des compas rendent nécessaire une détermination plus fréquente du point, il peut être utile de propager une méthode qui, croyons-nous, rend cette détermination plus prompte et plus facile et qui, à nous-même, depuis longtemps que nous en faisons usage, nous a rendu de grands services, non pas en temps ordinaire où tout est bon, mais dans des circonstances où les moyens usuels eussent été, sinon insuffisants, du moins plus lents et moins certains.

A. MARCQ-SAINT-HILAIRE,
Capitaine de frégate.

CALCUL DU POINT OBSERVÉ

Méthode des hauteurs estimées.

Nous rappellerons d'abord succinctement les principes sur lesquels repose la détermination du point par les hauteurs des astres et les chronomètres.

Convention. — Pour plus de clarté, nous appelons *projection terrestre* ou simplement *projection* d'un astre à un moment donné le point de la surface de la terre qui, au même moment, voit l'astre à son zénith.

Ainsi (*fig.* 1) le point A est la projection terrestre de l'astre *a*; la latitude et la longitude de A seront appelés latitude et longitude terrestres de l'astre. Il est évident que la latitude terrestre AQ d'un astre est égale à sa déclinaison, et que sa longitude terrestre BQ est égale à l'angle horaire de l'astre sur le méridien de Paris. La longitude terrestre du soleil est l'heure vraie de Paris.

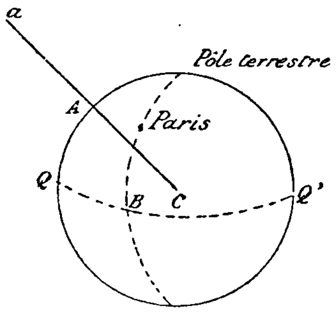


Fig. 1.

§ 1. *Une montre réglée fait connaître à tout instant les projections terrestres des astres portés dans la* Connaissance des temps.

Exemple : Le 24 octobre 1874, à $3^h43^m32^s$ de la montre, quelle est la projection terrestre de Véga ? La montre retarde de $4^h45^m58^s$ sur le temps moyen de Paris.

Heure à la montre	$3^h43^m32^s$	
État. Retard	4 45 58	
Heure moy. Paris.	$8^h29^m30^s$	
Tp. sid. le 24 à 0^h	14 10 51	
Correction pour $8^h29^m30^s$ . . .	1 24	
H. sid. Paris.	$22^h41^m45^s$	
Véga Æ.	18 32 41	Déclin. 38°40′13″ bor.
P Véga sur Paris	$4^h09^m04^s$	
Projection terrestre de Véga G_a..	62°16′00″ ouest	L_a 38°40′13″ nord.

Au moment où la montre marquait $3^h43^m32^s$, Véga était au zénith du point de la terre situé par la longitude et la latitude ci-dessus.

§ 2. *Le complément à 90° de la hauteur d'un astre, autrement dit sa distance zénithale, mesure la distance sur la terre du point d'observation à la projection terrestre de l'astre.*

Exemple : On voit (*fig.* 2) que la distance zénithale de l'astre *a*, prise du point O, est l'angle *a*C*z*, et que cet angle est mesuré sur la terre par l'arc de grand cercle OA, qui joint le point d'observation à la projection de l'astre. Supposons qu'à l'heure de l'exemple du paragraphe 1[er], on ait obtenu pour la hauteur vraie de Véga 48°51′; dans ce cas, la distance zénithale ou l'arc OA serait égal à 41°09′, et le point d'observation serait à la distance de 41°09′ ou 823 lieues, ou 2,469 milles de la projection de Véga, c'est-à-dire du point situé par 62°16′00″ longitude ouest et 38°40′13″ latitude nord.

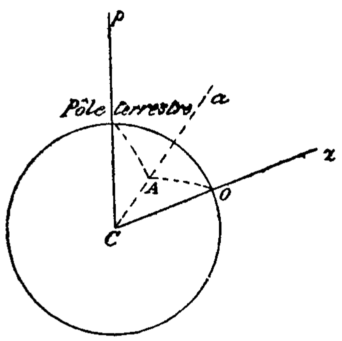


Fig. 2.

Prendre la hauteur d'un astre, c'est donc réellement mesurer la distance du point d'observation à un point de la terre, point qui est lui-même déterminé si on note l'heure à une montre réglée. C'est cette double opération, de prendre une hauteur et de noter l'heure correspondante, qui constitue une *observation.*

Remarque. — L'angle en O sur la surface de la terre, fait par le méridien OP et l'arc OA est l'angle azimuthal même de l'astre, puisque le plan *p*C*z* est le méridien du lieu et que le plan *a*C*z* est le vertical de l'astre; par suite, si, au moment de l'observation, l'astre reste au N.70°O, l'arc de grand cercle OA est lui-même dirigé au point O vers le N.70°O.

§ 3. Sur une sphère (*fig.* 3), tous les points situés à une distance donnée d'un point A sont sur le cercle CC ayant pour pôle le point A et pour distance au pôle la distance OA, égale à la distance donnée. En un point quelconque O, le cercle CC est perpendiculaire à l'arc OA correspondant. Donc :

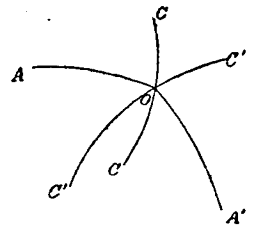


Fig. 3.

Une observation détermine sur la terre un lieu géométrique du point d'observation; ce lieu est un cercle ayant pour pôle la projection terrestre de l'astre observé, et pour distance au pôle le complément à 90° de la hauteur trouvée. Au point d'observation, le lieu géométrique a une direction perpendiculaire à l'azimuth de l'astre. (*Voir la remarque du* § 2.)

§ 4. Sur une surface, deux lieux géométriques d'un même point déterminent ce point par leur intersection, donc :

Deux observations sont nécessaires et suffisantes pour la détermination du point d'observation; ce point se trouve à l'intersection des deux cercles de la terre ayant respectivement pour pôles les projections terrestres des astres observés et pour distances au pôle les compléments à 90° des hauteurs trouvées. En leur point d'intersection, les deux lieux géométriques sont respectivement perpendiculaires aux verticaux d'observation et se coupent, par suite, sous un angle égal à celui de ces verticaux.

Exemple : Soit C′C′ (*fig.* 3) le second lieu géométrique dont A′ est le pôle et déterminant par son intersection avec CC′ le point d'observation O; les angles AOC et A′OC′ sont droits et l'angle COC′ est égal à AOA′.

En résumé, le point donné par deux *observations* est déterminé par ses distances à deux points de la terre exactement de la même façon qu'un point est déterminé sur un plan par ses distances à deux points connus du plan ; la même construction fort simple, puisqu'elle consiste à tracer deux cercles avec un compas, pourrait être employée sur la sphère, s'il était possible d'obtenir ainsi une approximation suffisante. Nous ne parlons pas des deux solutions données par l'intersection des deux cercles, le doute dans la pratique n'étant pas possible.

Remarque importante. — Un point obtenu par l'intersection de deux lignes est d'autant mieux déterminé que l'angle sous lequel ces lignes se coupent se rapproche de 90°; on doit donc, pour les deux observations, choisir deux astres dont les verticaux fassent un angle se rapprochant de l'angle droit. La direction en elle-même de chaque vertical est indifférente, il suffit qu'ils se coupent convenablement; c'est la seule condition dont il y ait à se préoccuper, exactement comme dans le cas où on détermine sa position par les relèvements de deux points à terre.

Nous venons de faire un exposé, géométrique, pourrions-nous dire, du problème de la détermination du point par les observations; cet exposé nous parait préférable à celui par lequel le problème est présenté comme consistant à trouver séparément la latitude par une hauteur méridienne ou autrement, et la longitude par la différence des heures de Paris et du lieu; on perd ainsi de vue le but même du problème, et on peut être amené à des conséquences inexactes. Comme ce que l'on cherche de cette façon est la latitude et l'heure et non le point, beaucoup de personnes sont persuadées qu'il est *indispensable* d'observer au méridien et au premier vertical, ou aussi près que possible de ces deux directions, ce qui n'est nullement nécessaire. Quelle que soit la position d'un astre dans le ciel, la montre détermine sa projection terrestre avec une exactitude qui ne dépend que de celle de son état absolu; d'un autre côté, l'exactitude de la hauteur ne dépend nullement de la direction de l'astre ni de son mouvement plus ou moins grand en azimuth et en hauteur, etc., etc., mais seulement de circonstances extérieures telles que l'état du ciel, de l'horizon, etc.; il s'ensuit que tous les moments sont également bons pour prendre une observation et que, dans tous les cas, cette observation détermine un lieu du point avec une exactitude qui ne dépend que de l'exactitude de l'état de la montre et de celle avec laquelle la hauteur a été prise. Il est bien entendu que nous écartons le cas des hauteurs trop petites qui rendent les réfractions douteuses.

Hauteur méridienne. — L'observation de la hauteur méridienne à la mer diffère des observations telles que nous les avons définies, en ce sens qu'au lieu de noter l'heure, on s'assure que la hauteur prise est la hauteur maximum et qu'on admet que cette hauteur correspond au passage de l'astre au méridien.

La déclinaison des astres n'exigeant pas, pour être obtenue, la connaissance exacte du *temps*, on a d'une manière suffisamment approchée la distance de la projection de l'astre au pôle terrestre; le complément de la hauteur donnant la distance de cette projection au point d'observation, une somme ou une différence donne la distance de ce dernier point au pôle; le lieu géométrique devient un cercle ayant son pôle au pôle de la terre, c'est-à-dire un parallèle de latitude.

Pour que la hauteur maximum d'un astre corresponde rigoureusement à son passage au méridien de l'observateur, il faut que les mouvements en déclinaison et en latitude de l'astre et de l'observateur soient égaux et de même sens.

Des calculs.

Le calcul du point donné par deux observations revient à celui du point d'intersection de deux cercles déterminés par leurs pôles et leurs distances aux pôles. Sauf le cas particulier où un des cercles est un parallèle de latitude, c'est-à-dire où une des hauteurs est prise au méridien, le calcul direct et rigoureux de ce point exige la résolution d'un quadrilatère sphérique dans lequel on connaît un angle et les quatre côtés; ce calcul est long et ne peut être commencé que lorsque les deux observations sont terminées, ce qui retarde le résultat; on y a généralement renoncé, quoique ce soit le seul moyen d'avoir le point dans toute sa rigueur, et on a recours à différentes méthodes basées sur la connaissance approchée, donnée par l'estime, du point à déterminer. On rectifie alors le point estimé d'une manière approximative, mais suffisamment exacte dans la pratique; c'est un procédé de ce genre qui va être exposé et qui est la conséquence naturelle de ce qui a été dit plus haut.

Considérons d'abord une seule observation.

CALCUL D'UNE OBSERVATION.

Soit A (*fig.* 4) la projection terrestre de l'astre, E le point estimé au moment de l'observation, P le pôle de la terre, QQ′ l'équateur. Soit aussi CC le lieu géométrique donné par l'observation, et E′ son point d'intersection avec l'arc AE. AE′ est égal au complément de la hauteur observée qui sera notée H_o, l'angle en E′ est droit.

Appelons $D = AQ$, la latitude terrestre ou déclinaison de l'astre ; $L_e = EQ'$, la latitude estimée; $P = APE$, la différence $(G_a - G_e)$ entre la longitude terrestre de l'astre et la longitude estimée.

Dans le triangle APE, dont on connait deux côtés et l'angle compris, calculons le complément de EA et l'angle PEA ; pour cela abaissons l'arc de grand cercle AA' perpendiculaire à PE, les deux triangles rectangles PAA' et EAA' donnent :

$$\mathrm{Tg}\, PA' = \mathrm{tg}\, PA \cos P\,;\ \cos EA = \frac{\cos PA}{\cos PA'} \cos (Q'A' - Q'E)\,;\ \cos PEA = \mathrm{tg}\, \frac{(Q'A' - Q'E)}{\mathrm{tg}\, EA}.$$

d'où en faisant $A'Q' = D'$, $90° - EA = H_e$ et $PEA = Z$ et remplaçant, on obtient :

$$(1)\ \mathrm{Tg}\, D' = \frac{\mathrm{tg}\, D}{\cos P}\,;\quad (2)\ \sin H_e = \frac{\sin D}{\sin D'} \cos (D' - L_e)\,;\quad (3)\ \cos Z = \mathrm{tg}\, (D' - L_e)\, \mathrm{tg}\, H_e.$$

De ces formules, on tire la valeur de H_e et Z, et enfin celle de EE', qui est égale à EA—E'A ou à $H_o - H_e$: cet arc de grand cercle EE' est toujours petit puisqu'il est au plus égal à la distance du point estimé E au point vrai qui se trouve sur CC, on peut le considérer comme se confondant avec l'arc loxodromique tangent en E ; comme l'angle PEE' ou Z est connu, un simple calcul d'estime fera passer du point E au point E'.

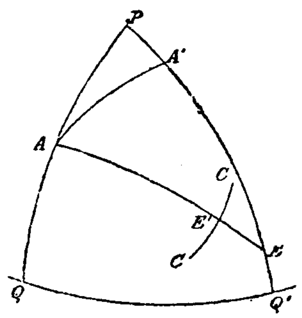


Fig. 4.

Si l'on n'a que cette seule observation sans renseignements sur les causes qui ont pu altérer l'estime, on doit adopter comme position le point E', car, de tous les points du lieu géométrique, c'est celui qui se trouve le plus rapproché du point estimé E.

H_e et Z sont évidemment la hauteur et l'azimuth de l'astre qui auraient été obtenus du point estimé E au moment de l'observation; pour cette raison, nous donnons à H_e le nom de *hauteur estimée.*

Il faut avoir soin de donner aux longitudes G_a, G_e et à leur différence algébrique $(G_a - G_e) = P$ la dénomination est ou ouest qui leur convient; D' est toujours de même dénomination nord ou sud que D, puisqu'il en est la projection sur le méridien du point estimé; la différence algébrique $(D' - L_e)$ doit aussi recevoir la dénomination nord ou sud convenable. L'angle Z doit toujours être pris plus petit que 90°; le sens de cet azimuth est indiqué par les dénominations de ($D' - L_e$) et de P. La différence ($H_o - H_e$) doit être portée dans le sens de l'angle Z, c'est-à-dire vers l'astre si elle est positive et à l'opposé si elle est négative.

En résumé, pour calculer une observation : faire le calcul de la hauteur et de l'azimuth de l'astre pour le point estimé et le moment de l'observation, retrancher la hauteur estimée de la hauteur observée, considérer cette différence comme une route dont l'angle serait l'azimuth calculé, et corriger le point estimé pour cette route.

On pourrait se dispenser de calculer l'azimuth en relevant l'astre, mais il est plus exact de faire le calcul, qui est d'ailleurs si court qu'un relèvement à prendre et à corriger exigerait peut-être plus de temps.

Construction d'une observation sur la carte.

Pour obtenir sur la carte la projection e' du point E', il suffit de porter, à partir du point estimé e (*fig.* 5), la quantité ee' égale à la différence ($H_o - H_e$) mesurée sur l'échelle des latitudes, dans la direction de l'astre ou à l'opposé, selon que cette différence est positive ou négative. L'angle en E' sur la sphère étant droit, et les angles se projetant en vraie grandeur sur la carte, la perpendiculaire cc à $e'e$ sera la tangente à la projection de CC, tangente que l'on peut considérer comme se confondant dans certaines limites avec cette projection elle-même et représentant par suite sur la carte le lieu géométrique du point donné par l'observation. Cette ligne sera appelée, selon l'usage, *droite d'observation* ou *ligne de position*.

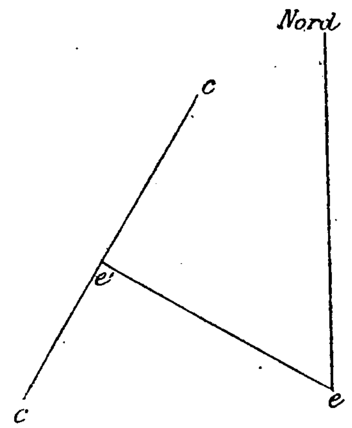


Fig. 5.

Exemple numérique. — Le 24 octobre 1874, à 8 heures du soir, s'estimant par : $L_e = 35°30'$ nord et $G_e = 9°30'$ ouest, on a obtenu pour hauteur corrigée de Véga, $H_o = 48°51'00''$; les coordonnées terrestres de Véga, déterminées au moyen de l'heure de la montre étant L_a ou $D = 38°40'13''$N., et $G_a = 62°16'00''$O.

LATITUDE.	LONGITUDE.	$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} D' = \dfrac{\operatorname{tg} D}{\cos P} \\ \cos Z = \operatorname{tg}(D' - L_e) \operatorname{tg} H_e \end{array} \right\}$	$\sin H_e = \dfrac{\sin D}{\sin D'} \cos(D - L_e)$
$D = 38°40'13''$N	$G_a = 62°16'00''$O	tg D $\bar{1}.90325$	sin D $\bar{1}.79577$
$L_e = 35°30'00''$N	$G_e = 9°30'00''$O		
	$P = 52°46'00''$O	C. cos P 0.21820	
$D' = 52°54'30''$N		tg D' 0.12145	C. sin D' 0.09818
$D' - L_e$ $17°24'30''$N		tg$(D' - L_e)$ $\bar{1}.4963$	cos$(D' - L_e)$ $\bar{1}.97964$
		tg H_e 0.0512	sin H_e $\bar{1}.87359$
		cos Z $\bar{1}.5475$	$H_e = 48°22'15''$
	t 26^m9		H_o $48°51'00''$
$\lambda = 10'10''$N	g $33'06''$O	Z. N. $69°20'$ O	$H_o - H_e$ $+ 28'45''$
$L_e' = 35°40'10''$N	$G_e' = 10°03'06''$O		

L'azimuth Z est N.-O. parce que $(D' - L_e)$ et P sont respectivement de dénomination nord et ouest; la correction $(H_o - H_e)$, égale à 28 milles 3/4, doit être portée dans le sens de l'azimuth, c'est-à-dire dans le N. 69°20' O., parce qu'elle est positive; négative, il aurait fallu la porter à l'opposé de l'azimuth, c'est-à-dire vers le S. 69°20' E. La correction, faite au moyen de la table du point, donne pour point rectifié, plus exact à coup sûr que le point estimé, le point e' situé par $L_e = 35°40'10''$N., $G_e = 10°03'06''$O.

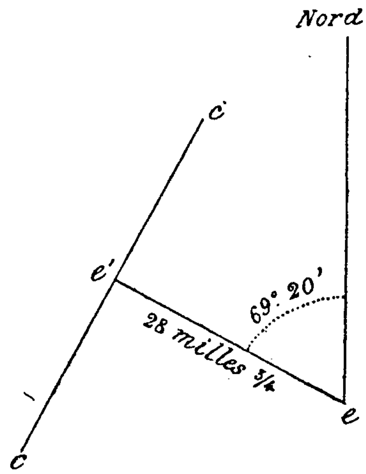


Fig. 6.

Pour construire sur la carte la droite d'observation, il suffirait de porter, à partir du point estimé e (*fig.* 6), 28 milles 3/4 dans le N. 69°20'O., et de mener, par le point e' ainsi obtenu, la perpendiculaire cc à ee'; cc est la droite d'observation.

Calcul du point donné par deux observations.

Supposons d'abord que les deux observations ont été prises du même lieu, ou, ce qui revient au même, que le déplacement du bâtiment dans l'intervalle des observations soit négligeable.

Calculons l'une des observations comme il vient d'être dit ; soient (*fig. 7 sur la carte*) e le point estimé, e' le point rectifié donné par le calcul, cc la droite d'observation perpendiculaire à ee', l'angle Nee' est égal à l'azimuth Z calculé.

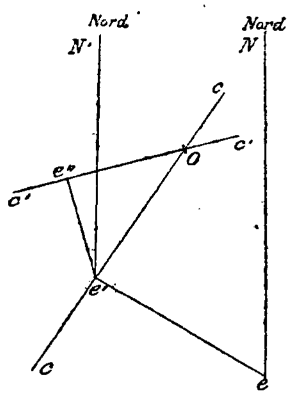


Fig. 7.

Calculons l'autre observation de la même façon, en considérant le point rectifié e' comme nouveau point estimé.

Soit $(H_o' - H_{e'})$ et Z' la différence de hauteur et l'azimuth obtenus par ce calcul ; plaçons le point e'' par rapport à e' comme celui-ci l'a été par rapport à e, en faisant l'angle $N'e'e'' = Z'$ et prenant $e'e'' = (H'_o - H_{e'})$; la perpendiculaire $c'c'$ à $e'e''$ est la droite de la seconde observation, et le point O, intersection des deux droites d'observation, est le point observé qu'il s'agit de calculer.

Dans le triangle $e'e''o$ rectangle en e'', $e'e''$ est égal à $(H'_o - H_{e'})$; l'angle en O est égal à celui des deux verticaux d'observation ee', $e'e''$ ou $(Z - Z')$, et l'on a $e'\,O = \dfrac{e'\,e''}{\sin O} = \dfrac{H'_o - H_{e'}}{\sin O}$; la table de point donnera sans calcul la valeur de $e'o$; or cette ligne a une direction connue puisqu'elle est perpendiculaire au vertical de la première observation ; un nouveau calcul d'estime fera passer du point rectifié e' au point observé O.

Pour avoir l'angle de route de ce dernier calcul d'estime, il faut avoir soin de choisir, entre les deux côtés de la perpendiculaire au premier azimuth, celui qui fait un angle aigu avec le second azimuth ; on aura ainsi la direction dans laquelle doit être portée la correction $\left(\dfrac{H'_o - H_{e'}}{\sin O}\right)$; si cette différence était négative, il faudrait évidemment la porter dans la direction opposée ; du reste, une simple figure faite à main levée, dans le genre de la figure 7, fera éviter toute chance d'erreur.

Si l'angle des deux verticaux était droit, $e'e''$ coïnciderait avec cc, et le point e'' serait lui-même le point observé O ; il suffirait, dans ce cas, de faire le calcul d'estime pour la route $(H'_o - H_{e/})$ et l'angle de route Z', on aurait de suite le point observé.

Si le bâtiment s'est déplacé dans l'intervalle des observations, on calcule la première observation comme il a été dit. Soient (*fig.* 8) e' le point rectifié et cc le lieu du point donné par ce calcul; portons à partir du point e' la droite $e'e'_1$, représentant le chemin parcouru dans l'intervalle ; la parallèle c_1c_1 à cc, menée par e_1', est évidemment la droite de la première observation ramenée au moment de la seconde.

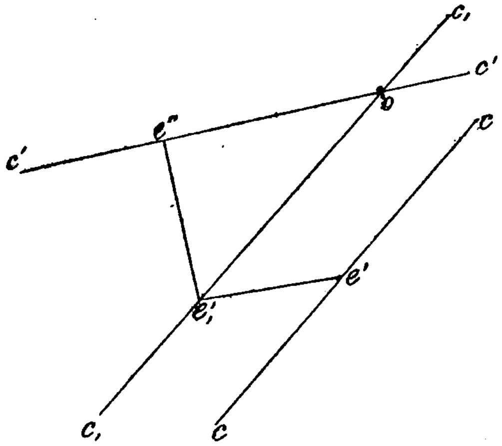


Fig. 8.

En calculant la seconde observation avec le point e'_1 comme point estimé, on obtient la seconde droite d'observation $c'c'$ qui détermine, par son intersection avec c_1c_1, le point observé O. On voit que, dans ce cas, il suffit de corriger le point rectifié, obtenu par le premier calcul, au moyen de l'estime dans l'intervalle et de continuer le calcul comme il a été dit précédemment.

En résumé, le calcul du point donné par deux observations consistera à :

1° Avec le point estimé et la première observation, calculer le point rectifié ;

2° Corriger ce point de l'estime dans l'intervalle ;

3° Calculer la deuxième observation avec le point obtenu ;

4° Corriger ce point pour un chemin perpendiculaire à l'azimuth de la première observation et égal à la différence des hauteurs du deuxième calcul divisée par le sinus de *l'angle d'observation.*

On obtiendra ainsi le point observé pour le moment de la deuxième observation.

Nous appelons *angle d'observation* l'angle des verticaux des deux astres observés ; pour être dans de bonnes circonstances, cet angle doit se rapprocher de 90°, et c'est la seule condition dont il y ait à se préoccuper.

Exemple numérique. — Supposons que dans le même lieu où a été prise l'observation de Véga donnée plus haut, on ait aussi obtenu pour la hauteur corrigée d'α du Cocher, 15°32'30'', et pour projection terrestre de cette étoile le point (L_a' ou D = 45°52'10''N. G_a' = 96°06'00''E.).

2° *Calcul.*

	LATITUDE.		LONGITUDE.		CALCUL DE D' ET Z'.		CALCUL DE $H_{e,}$	
Point rectifié par la 1re observation.	$L_{e,}$	35°40'10'' N	$G_{e,}$	10°03'06'' O	Z	N 69°20' O		
	D	45°52'10'' N	$G_{a,}$	96°06'00'' E	tg D	0.01318	sin D	$\bar{1}$.85598
			P	106°09'06'' E	C cos P	— 0.55567		
	D'	105°06'10'' N			tg D'	— 0.56885	C sin D'	0.01526
	($D' - L_{e,}$)	69°26'00'' N			tg($D' - L_{e,}$)	— 0.4257	cos ($D' - L_e'$)	$\bar{1}$.54568
					tg $H_{e,}$	$\bar{1}$.4323	sin $H_{e,}$	$\bar{1}$.41692
							$H_{e,}$	15°08'24''
					cos Z'	$\bar{1}$.8580	H'_o	15°32'30'
							$H'_o - H_{e,}$	+ 24'06''
			ε 9m,4		Z' =	N 46°10' E	$\frac{H'_o - H_{e,}}{\sin O}$	+ 26'07''
	λ	25'00'' N	g	11'36'' E	V	N 20°40' E		
Point observé..	L_o	36°05'10'' N	G_o	9°51'30'' O	Z' — V	25°30'		

Après avoir calculé ($H'_o - H_e'$) et Z', nous avons écrit sous Z' l'azimuth perpendiculaire à celui de la première observation et faisant un angle aigu avec celui de la deuxième, ce qui a donné l'angle de route V du calcul d'estime final. Le nombre de milles de ce calcul a été obtenu en cherchant dans la table de point le nombre de minutes de longitude correspondant à ($H'_o - H_{eve,}$) milles par la latitude (Z' — V).

En opérant ainsi, on évitera de se tromper sur le sens de V, car (Z' — V) doit être plus petit que 90°.

Voici la figure (*fig.* 9) correspondant au calcul ci-contre.

e point estimé qui a servi au premier calcul.

$ee' = 28^{\text{milles}},3/4$ dans le N. 69°20'O.

e' point rectifié qui a servi au deuxième calcul.

$e'e'' = 24^{m}1$ dans le N. 46°10' E., d'où $Oe'e'' = 25°30'$, et

$e'O = 26^{m},7$ dans le N. 20° 40' E.

O point observé.

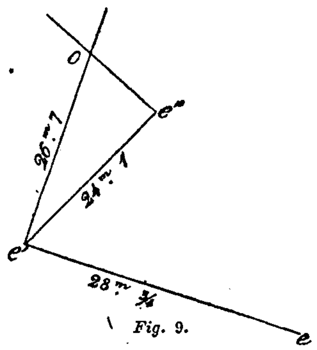


Fig. 9.

2e *exemple.* — S'estimant par 58°47' lat. N. et 2°39' long. E., on a obtenu :

		Hauteur corrigée ☉	Déclinon ☉ correspondte.	Heure vraie Paris correspondt
Données...	1re observation	30°30'	1°09'00" bor.	$22^{h}53^{m}25^{s}3$
	Estime dans l'intervalle 11 milles au N 63° O du monde.			
	2e observation	31°00'	1°10'40" bor.	$0^{h}34^{m}56^{s},6$
	On demande le point de la 2e observation.			

	FORMULES.	LATITUDE.	LONGITUDE.	$\text{tg}\,D' = \frac{\text{tg}\,D}{\cos P}$; $\cos Z = \text{tg}(D' - L_e)\,\text{tg}\,H_e$	; $\sin H_e = \frac{\sin D}{\sin D'} \cos(D' - L_e)$
1er calcul.	Estime.............	58°47'00" N	2°30'00" E		
	Θ	1°09'00" N	16°38'40" E	$\bar{2}.30263$	$\bar{2}.30255$
	P		14°08'40" E	0.01337	
	D'	1°11'10" N		$\bar{2}.31600$	1.68409
	$(D - L_e)$	57°35'50" S		0.1975	$\bar{1}.72905$
	H_e			$\bar{1}.7840$	$\bar{1}.71569$
	Z			$\bar{1}.9815$	H_e 31°18'27"
			ε 13m,8		H_o 30°30'00"
	λ	46'24" N	$g =$ 27'00" O	Z S 16°35' E	— 48'27"
	Point rectifié........	59°33'24" N	2°03'00" E		
			ε 9m,8		
	Estime dans l'intervalle λ	5'00" N	g 19'06" O	N 63°00' O	11m,0
2e calcul.	Point rectifié du 2e moment.............	59°38'24" N	1°43'54" E		
	Θ	1°10'40" N	8°44'09" O	$\bar{2}.31300$	$\bar{2}.31291$
	P		10°28'03" O	0.00729	
	D'	1°11'52" N		$\bar{2}.32029$	1.67981
	$(D' - L_{e'})$	58°26'32" S		0.2117	$\bar{1}.71880$
	H_e'			$\bar{1}.7783$	$\bar{1}.71152$
	Z'			$\bar{1}.9900$	$H_{e'}$ 30°58'30"
					H'_o 31°00'00"
			ε 3m,0	Z' S 12°15' O	+ 1'30"
	λ	54' S	g 5'54" O	V S 73°25' O	+ 3m,1
	Point observé du 2e moment...........	59°37'30" N	1°38'00" E	Z' — V 61°10'	

La figure 10 ci-jointe correspond au calcul précédent.

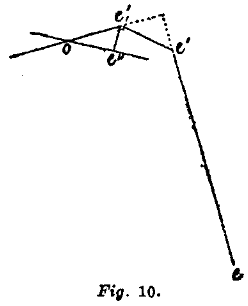


Fig. 10.

e point estimé qui a servi au premier calcul.
ee' première correction $48^m,6$ dans le N. 16°35′ O.
$e'e'_1$ chemin dans l'intervalle 11 milles dans le N. 63° O.
$e'e''$ 1′,5 dans le S. 12°15′ O.
$e'_1 o$ deuxième correction $3^m,1$ dans le S. 73°25′ O.
O point observé.

Le calcul direct rigoureux aurait donné, comme point observé, $L_o = 59°37'30''$. $G_o = 1°37'54''$; on voit que le résultat qui a été obtenu est d'une exactitude parfaite. Il ne faudrait pas s'attendre toujours à une exactitude aussi grande ; elle provient, dans ce cas spécial, de cette circonstance fortuite que l'azimuth de l'observation calculée la première est à peu près égal à l'angle de gisement des deux points estimé et observé. Les observations sont dans de mauvaises conditions pour la détermination du point; l'angle d'observation, n'étant que de 29°, est trop faible ; une erreur de 1′ sur une des hauteurs fausserait le point d'un peu plus de 2 milles ; cette erreur se porterait très-peu sur la latitude, mais presque complétement sur la longitude.

CAS OU UNE DES OBSERVATIONS EST PRISE AU MÉRIDIEN.

Pour une observation au méridien, la différence $G_a - G_e$ ou P est nulle, les formules deviennent :

$D = D'$; $\sin H_e = \cos (D - L_e)$ ou $H_e = 90° - (D - L_e)$; $\cos Z = 1$ ou $Z = 0$. On a ainsi H_e et Z. Le reste du calcul se fera exactement de la même façon.

Premier exemple. — Supposons qu'on ait eu une observation le matin et la hauteur à midi; soit 50°00′ la hauteur méridienne et 15° aust. la déclinaison correspondante du soleil.

POINT OBTENU CORRIGÉ DE L'ESTIME JUSQU'À MIDI. AZIMUTH.

Observation du matin.	$L_{e'}$	25°30′00″ N	$G_{e'}$	40°20′00″ O	Z	S 60° E
A midi...	D ⊙	15°00′00″ S				
	$D - L_{e'}$	40°30′00″ S				
	$H_{e'}$	49°30′00″				
	H_o	50°00′00″	ε $17^m,4$		Z′	Sud
$H_o - H_{e'}$, ou λ		+ 30′00″ S	g	19′18″ O	V	S 30° O
	L_o	25°00′00″ N	G_o	40°39′18″ O		

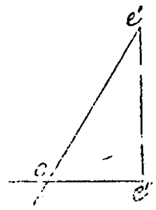


Fig. 10 A.

e' point du matin ramené à midi.
$e'e'' = 30^m$ au sud.
$e''e'o = 30°$.
$e''o = 17^m,4$ ou 19′18″ à l'O.
O point observé.

Il a suffi, pour avoir $e''o$, de prendre dans la table de point le chemin est et ouest correspondant à l'angle de route de 30° et au chemin nord et sud de 30 milles, sans passer par la longueur de $e'o$.

Le calcul étant préparé avant midi, il suffit d'un instant pour le terminer.

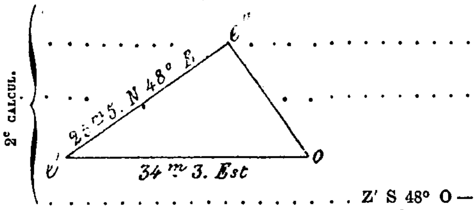
Deuxième exemple. — On a eu la hauteur à midi et une observation le soir.

Soit au moment de l'observation du soir $L_o = 25°00'N.$; la latitude déduite de celle de midi et $G_e' = 40°10'O.$ la longitude estimée. Avec ce point, calculons la deuxième observation, soit $H'_o - H_e' = -25'30''$ et $Z' = S.\ 48°O.$ les résultats obtenus.

Fin du calcul.

1re observation. L_o 25°00'00'' N G_e, — 40°10'00'' O Z nord ou sud

Fig. 10 B.



Z' S 48° O — 25' 30''

λ	00'00''	g	37°54'' E	V	Ouest	ε — 34m,3
L_o	25°00'00'' N	G°	39°32'06'' O		42°	

Il est évident que, dans le cas précédent, il n'y a aucun avantage à passer par la hauteur estimée, qu'il serait même plus rigoureux, puisque l'on connaît la latitude par la première observation, de calculer directement la longitude par la méthode ordinaire. L'exemple a été donné pour faire voir comment on s'y prendrait si on voulait toujours employer le genre de calcul qui a été donné et qui consiste à trouver la distance et la route par arc de grand cercle d'un point à un autre de la sphère.

CONSIDÉRATIONS SUR LA MÉTHODE.

Nous ne croyons pas qu'on ait encore employé cette méthode de calculer approximativement un point de la sphère donné par ses distances à deux points connus, lorsqu'on a déjà une position approchée du point cherché. Ce genre de calcul est applicable au même problème sur le plan; un exemple numérique en fera parfaitement comprendre l'esprit.

Nous supposerons les coordonnées rectangulaires et nous leur conserverons les notations L et G, nord ou sud, est ou ouest, qui leur sont données sur la sphère.

Soit à calculer (*fig.* 11) le point x situé à 43 mètres du point a et à 58 mètres du point a', les coordonnées de a et de a' étant ($L_a = 63^m N., G_a = 17^m O.$) ($L_a' = 22^m N., G_a' = 50^m,4 E.$) et connaissant le point approximatif e ($L_e = 35^m N$, $G_e = 4^m,1 E.$)

Au moyen des coordonnées de e et de a, avec la table des triangles rectangles (*table de point*), on a calculé la grandeur et la direction de ea, d'où on a tiré celles de ee' et les coordonnées de e'; on a de même calculé, avec les points e' et a', la grandeur et la direction de $e'e''$; d'où on a tiré, au moyen du triangle rectangle $e''e'o$, celles de $e'o$ et les coordonnées de o. Ce point o, intersection des deux tangentes aux cercles en e' et en e'', pourra être considéré comme le point x lui-

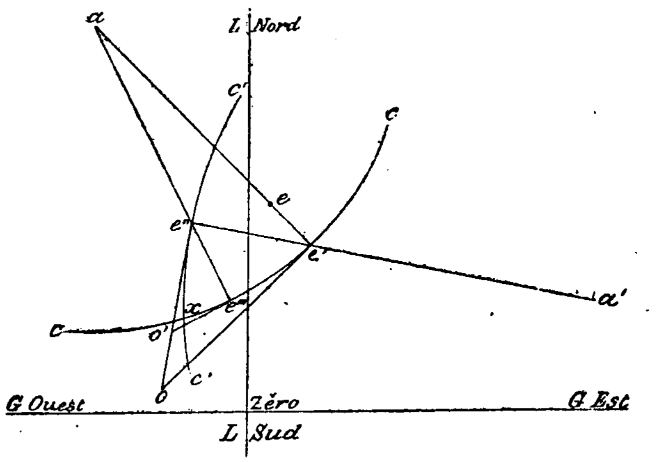


Fig. 11.

		L.	G.	AZIMUTS.	DISTANCES.
	e	35 N	4,1 E		35 = ea
	a	63 N	17 O		43 = $e'a$
	$(a - e)$	28 N	21,1 O	Z N 37° O	8 = ee'
	$e' - e$	6,4 S	4,8 E		
CALCUL.	e'	28,6 N	8,9 E		
	a'	22 N	50,4 E		
	$a' - e'$	6,6 S	41,5 E	Z' S 81° E	42 = $e'a'$
					58 = $e''a'$
					— 16 = $e'e''$
	$o - e'$	13,8 S	18,4 O	V N 53° E	— 23 = $e'o$
	O	12,8 N	9,5 O	46°	

même, si le point e est suffisamment rapproché. Dans le cas où on voudrait une approximation plus grande, après avoir obtenu $e'e''$, on calculerait les coordonnées de e'', puis la grandeur et la direction de $e''e'''$ et on déterminerait le point o', et ainsi de suite. On pourrait aussi recommencer le calcul avec le point o, considéré comme point approché.

Il est évident que si on voulait une exactitude parfaite, il serait préférable de faire le calcul direct, qui consisterait à résoudre les équations des deux cercles :

$$(L - 63)^2 + (G + 17)^2 = 43^2 ; \; (L - 22)^2 + (G - 50{,}4)^2 = 58^2.$$

La marche qui a été suivie pour le calcul précédent sur un plan est précisément celle qui a été adoptée pour le calcul analogue sur la sphère, si ce n'est qu'on s'est servi des hauteurs au lieu des distances zénithales, ce qui revient au même et évite la petite opération de prendre le complément des hauteurs. Appliquée à la détermination du point en mer, cette méthode permettra d'avoir, avec une première approximation, un point suffisamment exact ; ce n'est que dans le cas d'erreurs tellement considérables sur l'estime qu'elles deviennent inadmissibles, qu'il y aurait lieu de prendre une deuxième approximation de la façon indiquée dans l'exemple de calcul sur un plan. Les distances zénithales très-petites ou un angle d'approximation très-défavorable peuvent aussi rendre une deuxième approximation nécessaire, même avec une erreur ordinaire sur l'estime. On remarquera que, toutes choses égales d'ailleurs, plus l'angle des deux cercles, c'est-à-dire l'angle d'observation, se rapprochera de l'angle droit, et plus le point o se rapprochera du point x, parce que la deuxième tangente, celle en e'', devient alors de plus en plus petite ; c'est une raison de plus, si on emploie ce genre de calcul, pour prendre des observations dont l'angle se rapproche de 90°.

La méthode de calcul employée ordinairement consiste à faire, *dans tous les cas*, deux calculs de longitude avec la latitude estimée, à obtenir ainsi un point de chacun des lieux géométriques et à mener, par ces points, deux tangentes dont on calcule le point d'intersection, généralement par la méthode Pagel. De cette façon, la longitude estimée est complétement négligée. Il serait certainement plus logique, si on ne veut utiliser qu'un des éléments du point estimé, de choisir celui qu'on suppose le moins erroné, ou bien, dans l'ignorance où l'on est le plus souvent du sens de l'erreur de l'estime, de suivre la règle que nous avons donnée précédemment dans une *Note sur le point observé*

(*Revue maritime*, octobre 1873), où elle est ainsi formulée : « Pour les observations plus voisines du premier vertical que du méridien, faire un calcul de longitude avec la latitude estimée ; pour les observations plus voisines du méridien que du premier vertical, faire un calcul de latitude avec la longitude estimée ; rectifier ensuite le point. » Nous n'étions pas entré dans le détail des calculs. Une figure fera comprendre, en l'expliquant, l'importance de cette règle. Soit (*fig.* 12) $cc, c'c'$ les projections sur la carte des deux cercles dont l'intersection détermine le point x qu'il s'agit de calculer ; soit e le point estimé. Menons le parallèle de e qui coupe les deux courbes en b et b' ; par la

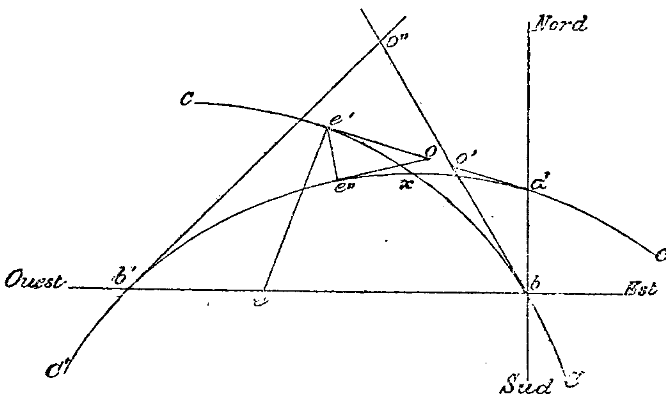


Fig. 12.

méthode ordinaire, ce sont ces deux points que l'on détermine, et le point observé que l'on obtient est le point d'intersection o'' des tangentes en b et en b'. On comprend que, si l'une des observations est prise dans les environs du méridien, pour peu que le point estimé soit erroné en latitude, le point o'' doit s'éloigner sensiblement de x, parce que l'une des tangentes émane alors d'un point très-éloigné[1].

---

[1] Différentes méthodes ont été proposées pour remédier à l'inexactitude que présente la méthode ordinaire lorsque les hauteurs sont voisines du méridien. On trouvera à la fin du travail de M. le lieutenant de vaisseau Hilleret, sur les courbes de hauteurs (*Revue maritime*, mai 1874), l'exemple cité plus haut calculé de cinq façons différentes ; les observations sont voisines du méridien, l'une est à 16° dans l'Est et l'autre à 13° dans l'Ouest.

Dans ce cas particulier, le calcul Pagel, ordinairement employé, donne 10 milles d'erreur sur le résultat ; les trois méthodes suivantes donnent le point à 2'8 ou à 3 minutes près, mais exigent l'emploi des différences secondes ou l'usage des constructions graphiques et de tables

Si on suit la règle citée plus haut, la première observation, se rapprochant plus du premier vertical que du méridien, avec la latitude estimée on calculera une longitude, ce qui donnera le point b; la deuxième observation étant, au contraire, plus voisine du méridien que du premier vertical, avec la longitude estimée, c'est-à-dire celle de b, on calculera une latitude, ce qui donnera le point d; rectifiant ensuite le point de la manière ordinaire en se servant seulement, au lieu du coefficient $\frac{dG}{dL}$, du coefficient $\frac{dL}{dG}$ calculé par les différences logarithmiques ou par l'azimuth ou autrement, on obtiendra comme position le point o', très-probablement plus exact que o'', et sans plus de calculs. Cette règle nous paraissait donc un progrès sur ce qui se fait; elle présente, il est vrai, l'inconvénient de faire changer de calcul selon la direction de l'observation. La méthode que nous proposons aujourd'hui évite cet inconvénient (dans le cas de la figure 12, le point que l'on obtiendrait, en l'employant, serait le point o en passant par e' et e''), les résultats ont toute probabilité d'être plus exacts, et elle offre en outre l'avantage de déterminer immédiatement le point que l'on doit adopter si on n'a qu'une observation. Le calcul est simple, puisqu'il consiste toujours à calculer la distance et la route d'un point à un autre, et nous sommes convaincu qu'on en prendrait aussi facilement l'habitude que de celui de l'angle horaire; il n'exige aucune table spéciale. Le calcul de rectification, qui est un calcul d'estime, courant en navigation, se fait avec la plus grande facilité. Nous pourrions peut-être ajouter que, du moment qu'on renonce au calcul direct comme trop long et qu'on a recours aux calculs de fausse position, la méthode des hauteurs estimées est la plus rationnelle. Dès qu'il est bien entendu que prendre une hauteur c'est mesurer sa distance à un point donné par l'heure de la montre, quoi de plus naturel que de vérifier,

---

spéciales. Ces quatre méthodes se servent de la latitude estimée en négligeant la longitude, ce qui fait que, malgré la complication des calculs, elles n'arrivent pas tout à fait au résultat.

La cinquième méthode, dite des courbes de hauteur, de M. Hilleret lui-même, donne un point exact par un calcul ingénieux où il est fait usage des latitudes croissantes ou logarithmes népériens au lieu des logarithmes vulgaires; mais l'exactitude obtenue ne tient nullement au mode de calcul, elle provient uniquement de ce qu'on a employé la longitude estimée pour calculer la latitude, tout en négligeant la latitude estimée, et qu'on a ainsi suivi la règle donnée plus haut. On aurait obtenu identiquement et plus simplement le même résultat en calculant de la façon ordinaire, avec les deux hauteurs et la longitude estimée, deux latitudes et les coefficients $\frac{dL}{dG}$ et en rectifiant ensuite le point estimé comme on le fait habituellement avec les deux longitudes calculées et les coefficients $\frac{dG}{dL}$.

pour ainsi dire, si le point estimé se trouve à la distance voulue, et s'il ne s'y trouve pas, de le corriger en conséquence ?

Simplification dans les calculs.

On a vu que, par la méthode des hauteurs estimées, on avait, dans tous les cas, à calculer la route Z et le complément à 90°, H_e, de la distance du point *e*, situé par la latitude L_e, au point *a* situé par la latitude D, la différence en longitude des deux points étant égale à P. Selon les valeurs particulières que peuvent avoir P, D, L, il se présente dans le calcul des simplifications qui vont être examinées très-sommairement.

Il faut d'abord remarquer que H_e doit être obtenu assez exactement, puisqu'on en déduit le nombre de milles qu'il y a à porter dans une certaine direction pour corriger le point estimé, mais qu'il n'en est pas de même de l'angle Z, qui donne cette direction et qu'il suffit d'avoir dans la pratique à un demi-degré près.

Si les angles P et Z sont peu considérables, on admettra l'égalité des rapports $\frac{Z}{P}$ et $\frac{\sin Z}{\sin P}$ et on calculera Z par la formule $Z = P \frac{\cos D}{\cos H_e}$, ce qui se fera sans logarithmes au moyen de la table de point. On pourra agir ainsi tant que Z et P ne dépasseront pas 25°, ce que l'on sait à l'avance puisque P est donné et qu'on doit connaître toujours à peu près la direction dans laquelle on a observé.

Exemple : $P = 14°30'$ $D = 30°00'$ $H_e = 60°00'$, avec la table de point on trouve :

$$\frac{14,5}{\cos 60°} = 29; \; 29 \times \cos 30° = 25,1 \text{ d'où } Z = 25°06'.$$

La valeur exacte de Z serait de 25°42′ avec une différence négligeable de 36′.

Si $P = 0$ (hauteur méridienne) on a : $H_e = 90° - (D - L)$, $Z = 0$.

Si $D = 0$. . . . . on a : $\sin H_e = \cos L \cos P$

$$\cos Z = \operatorname{tg} L \operatorname{tg} H_e \text{ ou } \sin Z = \frac{\sin P}{\cos H_e}.$$

Si $L = 0$. . . . . on a : $\sin H_e = \cos D \cos P$

$$\cos Z = \frac{\sin D}{\cos H_e} \text{ ou } \sin Z = \operatorname{tg} P \operatorname{tg} H_e.$$

Si D est petit et qu'en même temps P soit tel que D' le soit lui-même suffisamment, en admettant l'égalité des rapports $\frac{\operatorname{tg} D'}{\operatorname{tg} D'}$, $\frac{D'}{D}$, $\frac{\sin D'}{\sin D}$, les formules générales du triangle pourront s'écrire :

$$(1)\ D' = \frac{D}{\cos P}\ (2)\ \sin H_e = \cos P \cos (D' - L_e),\ (3)\ \cos Z = \operatorname{tg} H_e \operatorname{tg} (D' - L_e),$$

la formule (1) se calculera avec la table de point. On pourra faire usage de ces formules tant que D' ne dépassera pas 3°.

$$\text{Si } P = 90°, \text{ on a } \sin H_e = \sin D \sin L_e \left\{ \begin{array}{l} \cos Z = \dfrac{\operatorname{tg} H_e}{\operatorname{tg} L_e} \\ \sin Z = \dfrac{\cos D}{\cos H_e} \end{array} \right.$$

Quand D diffère peu de 90°, ce qui a lieu pour la polaire, en appelant Δ le complément de D, on aura $H_e = L_e + \Delta \cos P$, $Z = \Delta \frac{\sin P}{\cos H_e}$, formules qui se calculeront avec la table de point. *Exemple :*

CALCUL D'UNE OBSERVATION DE LA POLAIRE.

S'estimant par 59°30'N. et 15°00'O., on a eu H_o de la polaire = 59°50', les coordonnées terrestres de l'étoile étant Δ = 1°21'24'', G_a = 80°00'E.

L_e	59°30'00'' N	G_e	15°00'00'' O		
Δ	1°21'24''	G_a	80°00'00'' E		
$\Delta \cos P$	— 7'06''	P	95°00'00'' E	$\Delta \sin P$	81'
H_e	59°22'54''			$\Delta \frac{\sin P}{\cos H_e}$	161'
H_o	59°50'00''		$1^m,3$		
$H_o - H_e$ ou λ	+ 27'06'' N	g	2'30'' E	Z	N 2°41' E
$L_{e,}$	59°57'06	$G_{e,}$	14°57'30'' O		

Nous ne croyons pas qu'il y ait lieu de considérer, dans tous les cas, l'observation de la polaire comme étant prise au méridien et de négliger son azimuth, qui peut s'élever à près de 3° par la latitude de 60°. Si, pour la détermination du point, cette observation est combinée avec une autre qui soit elle-même prise à moins de 30° à 40° du méridien, il peut en résulter une erreur sensible sur le point définitif.

Quant P est compris dans la limite des hauteurs circumméridiennes (cette limite est donnée dans les tables, on sait qu'elle dépend des valeurs de L et D et de l'approximation désirée), on calculera la correction C à faire à la hauteur dont l'angle est P, et on aura :

$$H_e = 90^\circ - (D - L_e) - C,\ Z = P\frac{\cos D}{\cos H_e}. \text{— } \textit{Exemple :}$$

CALCUL D'UNE OBSERVATION CIRCUMMÉRIDIENNE.

S'estimant par 25°00′ lat. sud et 30°00′ long. ouest, on a obtenu H_o ⊕ $= 54°20'$, les coordonnées terrestres du ⊖ étant 10°00′N. et 25°O.

Calcul.

LATITUDE.		LONGITUDE.	αP^2 et $Z = P\frac{\cos D}{\cos H_e}$.	$H_e = 90° - (D - L_e) - \alpha P^2$.
			3″06	
Estime........	25°00′00″ S	30°00′00″ O	4 00	55°00′00″
Astre.........	10°00′00″ N	25°00′00″ O	1224″ ou	20′24″
Différence....	35°00′00″ N	5°00′00″ E		H_e 54°39′36″
		ou 20m,0	P cos D 4°,9	H_o 54°20′00″
		t 2m,9		
	λ 19′24″ S	*g* 3′12″ O	Z N 8°,5 E	$H_o - H_e$ — 19′36″
Point rectifié..	22°19′24″ S	30°03′12″ O		

Le calcul exact aurait donné $H_e = 54°39'00''$ et $Z = 8°34'$.

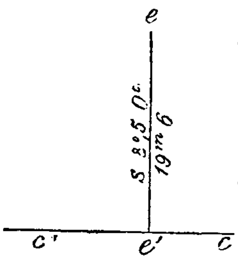


Fig. 13 A.

On s'est contenté du premier terme αP^2 de la correction ; si l'approximation n'était pas suffisante avec le premier terme, il serait plus simple de faire le calcul ordinaire que d'entreprendre celui des deuxième et troisième termes. Le résultat a été, comme pour les autres observations, le point rectifié et l'azimuth avec lesquels on calculera le point exact au moyen d'une seconde observation.

Il y aurait encore d'autres cas particuliers à examiner, on verra facilement les simplifications qui en résulteraient pour le calcul. Nous allons appliquer celles qui viennent d'être indiquées au calcul du point par deux observations données précédemment. *Exemple :*

S'estimant par 58°30′ N. et 1°00′ E., on a eu :

	H_o ⊕	D ⊖	G_a ⊖
1re observation.	30°30′00″	1°09′00″ N	16°38′40″ E
	Dans l'intervalle fait 11 milles au N. 63° O. du monde.		
2e observation.	31°00′00″	1°10′40″ N	8°44′09″ O

Calcul.

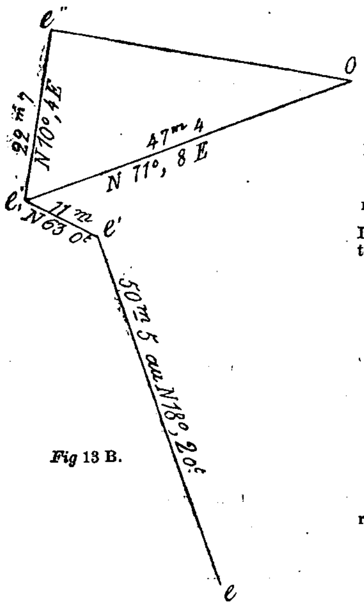


Fig 13 B.

L_e 58°30'00" N	G_e 1°00'00" E		cos P $\bar{1}.98362$
D 1°09'00" N	G_a 16°38'40" E		cos (D' — L_e) $\bar{1}.73251$
D' 1°11'36" N	P 15°38'40" E		sin H_e $\bar{1}.71613$
D' — L_e 57°18'24" S			H_e 31°20'33"
	ε. 15m,8		H_o 30°30'00"
1re correction λ 48'00' N	g 30'36" O	Z S 18°,2 E	— 50'33'
	ε. 9m,8		
Dans l'intervalle. 5'00" N	19'06" O	N 63° O	11m
$L_{e'}$ 59°23'00" N	$G_{e'}$ 0°10'18" E	1270	90° — (D — $L_{e'}$) 31°47'40"
		1"18	
		1016	
		127	
		127	
D 1°10'40" N	G_a 8°44'09" O	1499" ou	.... 24'59"
D — L_e 58°12'20" S	P 8°54'27" O		H_e 31°22'41"
	ou 35m,6		H_o 31°00'00"
		Z' S 10°,4 O	— 22'41"
	ε. 45m,0		
2e correction λ 14'48" N	g 1°23'42" E	V S 71°,8 O	— 47m,4
L_o 59°37'48" N	G_o 1°39'00" E	61° ,4	

Le point obtenu est à un demi-mille environ du point exact, quoique le point estimé fût erroné de 70 milles.

Dans le premier calcul on a suivi ce qui a été dit pour le cas où D et D' sont suffisamment petits ; la deuxième observation a été calculée comme circumméridienne ; dans les deux calculs, l'azimuth a été pris à vue dans la table de point par la formule $Z = \frac{P}{\cos H}$ en négligeant cos D.

On voit que la méthode de détermination du point est toujours la même et qu'il ne s'agit ici que de simplifications dans le calcul de la distance et de la route d'un point à un autre. Nous avons disposé les calculs de la façon qui nous a paru la plus claire, en laissant en dehors celles des coordonnées terrestres de l'astre et des corrections de hauteurs qui doivent toujours être faites en premier lieu et que nous croyons préférable de mettre à part.

Ordre du calcul. — Si les deux observations sont prises à intervalle, on est tout naturellement conduit à calculer d'abord la première pour rectifier tant bien que mal son point, et ensuite la seconde pour déterminer le point exact. Quand on fait tout le calcul à la fois, rien ne force à calculer les observations dans l'ordre où elles ont été prises; il y a alors tout avantage à commencer par celle dont la direction se rapproche de l'erreur supposée sur l'estime.

Ainsi si les deux observations sont prises l'une dans le N.-E., l'autre dans l'E.-S.-E., et qu'on croit avoir été drossé dans le S.-S.-O. ou dans le N.-N.-E., il sera préférable de calculer d'abord celle du N.-E., et ensuite celle de l'E.-S.-E. Si on a été déplacé dans le sens où on le supposait, le premier point rectifié se rapprochera beaucoup du point vrai et le point définitif sera très-exact.

Si on n'a pas d'indications sur le sens probable de l'erreur de l'estime, il sera généralement préférable de commencer par l'observation dont l'angle P est le plus rapproché de 90°. Du reste, l'ordre dans lequel les observations sont calculées a peu d'importance; les deux points obtenus, en commençant par l'une ou l'autre observation, sont différents entre eux, mais sont tous deux suffisamment exacts.

OBSERVATION PRISE AUX ENVIRONS DU ZÉNITH.

Dans ce cas, la distance zénithale estimée est petite; on la calculera de la manière suivante, plus exactement et plus simplement que par la méthode donnée précédemment.

Si on appelle $\varphi(x)$ la fonction de x égale à $\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin 1''}$ on trouve, par une transformation simple, que la formule générale $\cos N = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$ peut s'écrire $\varphi(N) = \varphi(D - L) + \cos L \cos D \times \varphi(P)$; cette formule se calculera rapidement par la table XLI de Caillet, qui donne $\varphi(x)$ pour les angles x inférieurs à 7°45′; on en tirera la distance zénithale estimée dont on retranchera la distance observée; l'azimuth sera donné par la formule $\sin Z = \dfrac{P\cos D}{N}$ que l'on résoudra avec la table de point, le reste du calcul se continuera de la façon habituelle [1]. *Exemple :*

[1] La formule ci-dessus peut servir à calculer l'angle horaire P, connaissant les trois côtés lorsque N et P sont compris dans les limites de la table; il serait à désirer que cette table fût aussi étendue que la table XLII, qui donne les logarithmes de la fonction φ.

S'estimant par 10°20′ N. et 40°05 O., on a eu :

DONNÉES.	H_0 ⊕	D ⊖	G ⊖ ou H. v. de Paris
1re observation.	83°37'00"	14°22'15" N	35°52'45" O
Route dans l'intervalle	avant midi 2m,4 au N 13° O		
	après midi 1m,6 au N 13° O		
2e observation.	84°14'30"	14°22'54" N	43°40'24" O
On demande le point de midi.			

Calcul.

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(N_c) = \varphi(D - L) + \cos L \cos D \times \varphi(P)\\ \sin Z = \dfrac{P \cos D}{N_c}.\end{array}\right.$$

	LATITUDE.	LONGITUDE.		
Estime..........	10°20'00" N	40°05'00" O	φ (P) 555.0	
			× cos L 546.2	
1er astre..........	14°22'15" N	35°52'45" O	× cos D...........	529.1 2e terme
				511.9 φ (D − L)
				1041.0 φ (N_c)
Différence........	4°02'15" N	4°12'15" E	23m,02s =	5°45'30" N_c
	ou 16m09s	ou 16m49s	$\sin Z = \frac{4.1}{3.8}$	6°23'00" N_o
1re correction.....	26'36" S	26'48" O	Z N 45° E	−37'30"
Avant midi.......	2'24" N	0'36" O	N 13° O	2m,4
Midi rectifié......	9°55'48" N	40°32'24" O		
Après midi.......	1'36" N	24' O	N 13° O	1m,6
2e point rectifié...	9°57'24" N	40°32'48" O	307.0	293.0
			302.4	614.8
				907.8
2e astre..........	14°22'54" N	43°40'24" O		
Différence........	4°25'30" N	3°07'36" O	21m30s,6 =	5°22'39" N_c
	ou 17m42s	ou 12m30s,4	$\sin Z' = \frac{3.0}{5.4}$	5°45'30" N_o
				22'51"
			Z' N 34° O	
2e correction......	16'24" S	16'42" E	V N 45° O	−23m,2
Midi observé.....	9°39'24" N	40°15'42" O	11°	

Les φ (P) multipliées par cos L, puis par cos D ont été prises à vue dans la table de point; le calcul par logarithmes serait un peu plus long.

L'estime étant erronée de 44 milles, le point rectifié par la première observation n'avait plus que 23 milles d'erreur, le point définitif est exact à 6/10 de mille près ; cette légère erreur provient de ce que les distances étant petites, les cercles d'observation ont une courbure accentuée. (Voir page 373, si on voulait avoir une plus grande approximation.) Les observations sont prises dans de très-bonnes conditions, elles se coupent sous un angle de 79° et ne sont espacées que d'une demi-heure, ce qui met à l'abri d'erreurs sensibles sur l'estime.

Usage de la table de point pour la résolution des triangles sphériques. — On a vu que fréquemment l'azimuth était obtenu sans calcul avec la table de point; on pourra agir ainsi toutes les fois qu'on voudra avoir un angle sans grande approximation. *Exemples :*

1° Trouver Z connaissant $P = 45°30'$, $D = 17°00'$, $H = 40°30'$, on a $\sin Z = \frac{\sin P \cos D}{\cos H}$; en adoptant un rayon quelconque, 100 par exemple, la table de point donne :

$$100 \sin P = 71{,}4;\ 71{,}4 \cos D = 68{,}3;\ \frac{68{,}3}{\cos H} = 89{,}9 = 100 \sin Z;\ Z = 64°;\ \text{exactement } 63°45'.$$

2° $\sin x = \sin 3° \frac{\sin 75°}{\sin 50°}$; x étant petit, on supposera $\frac{\sin x}{\sin 3°} = \frac{x'}{180'}$, et on aura :

$$180' \sin 75° = 174';\ \frac{174'}{\sin 50°} = 227',\ x = 3°47',\ \text{valeur exacte.}$$

3° $\sin x = \frac{\sin 3°20'}{\sin 7°10'} \cos 40°$ ou approximativement $\sin x = \frac{200 \cos 40°}{430}$, $200 \cos 40° = 153{,}2$ $\sin x = \frac{153{,}2}{430}$ $x = 20°50'$, exactement $20°55'$; c'est ce dernier cas qui a été employé dans le calcul précédent pour avoir les azimuths. Toutes ces opérations se font à vue sans rien écrire.

4° Trouver l'azimuth d'un astre ayant deux observations voisines de cet astre.

La formule $\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$, différenciée par rapport à H et P, L et D restant constants, donne :

$\operatorname{Sin} Z = \frac{-dH}{dP \cos L}$ d'où on tirera la valeur de Z. *Exemple :*

Étant par 40°0′ latitude, on a eu :		HEURE A LA MONTRE.		HAUTEURS.
Première observation		3^h25^m		36°20′
Deuxième observation.....		3^h27^m		36°30′
d'où........	$dP =$	$-30'$	$dH =$	$10'$

$$\text{et } \sin Z = \frac{10}{23} \text{ et } Z = 25°\ 45'.$$

5° Calculer la route directe du point situé par 15° sud et 160° est, au point situé par 60° sud et 56° est.

Formule: $\cot g\, Z = \frac{\operatorname{tg} 60° \cos 15°}{\sin 104°} - \frac{\sin 15°}{\operatorname{tg} 104°}$. La table de point donne à vue :

Premier terme $\times 50 = 86,2$
Deuxième terme $\times 50 = -3,2$ S.-O.

$$\cot g\, Z = \frac{89,4}{50},\ Z = 29°15' \text{ à un demi-degré près.}$$

On voit que cette méthode revient à employer les lignes naturelles au lieu de leurs logarithmes.

6° Calculer le changement dP sur P pour un changement donné dL sur L, H et D étant constants et Z connu. On se servira de la relation $dP = \frac{dL \cot g\, Z}{\cos L}$ tirée de la formule $\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$, différenciée par rapport à L et à P, soit $L = 30°$, $Z =$ N. 40° O., $dL = 9'$ N.; la table de point donne à vue $dP = 12'4$ E. (La correction Pagel n'est autre que dP en secondes de temps pour $dL = 1'$; elle est égale à $\frac{4 \cot g\, Z}{\cos L}$ et dans ce cas-ci à $5^s,5$.) On trouverait de même à vue dP connaissant dL.

Réciproquement, connaissant dL, dP et L, trouver Z.

Soit $L = 30°$, $dL = 1'$ N.; $dP = 5^s,5$ ou $1',375$ E. On a $\cot g\, Z = 1,375 \cos 30°$, d'où $Z =$ N. 40° O. ou S. 40° E.

Il est inutile de nous étendre davantage sur le parti que l'on peut tirer de la table des triangles rectangles rectilignes pour les calculs de mer; elle peut remplacer quantité de petites tables particulières qu'on a pris la peine de calculer.

De même une table des triangles rectangles sphériques, calculée sur la formule $\cos x = \cos z \cos y$, donnant l'un des trois angles, x, y ou z, connaissant les deux autres, permettrait de résoudre les triangles sphériques avec rapidité et remplacerait les tables spéciales de circonstances favorables pour l'heure, d'amplitude, de lever et de coucher des astres, etc.

Résultat moyen de plusieurs observations voisines du même astre. — Nous croyons qu'en mer on doit prendre pour une observation trois contacts, surtout pour éviter les erreurs de lecture tant sur la montre que sur l'instrument, mais qu'il est inutile d'aller au delà. Le calcul se fera avec la moyenne des trois heures et des trois hauteurs. On pourrait obtenir le résultat séparé de chaque observation de la manière suivante :

Soit h et H l'heure et la hauteur de la première observation, dh et dH les différences des heures et des hauteurs entre la première et la deuxième observation. La première observation sera calculée comme d'habitude, soit H_e et Z les résultats. La deuxième hauteur estimée, H'_e, sera donnée par la formule $H'_e = H_e + dh \times \cos L \sin Z$, tirée de la relation déjà citée $dH = - dP \cos L \sin Z$, et en négligeant le mouvement propre de l'astre, celui de l'observateur et la marche de la montre. (dh doit être affecté du signe — quand l'astre est dans l'Ouest.)

La correction donnée par la première observation est $H_o - H_e$, la deuxième correction est $H'_o - H'_e$ ou $H_o + dH - H_e - dh \cos L \sin Z$; la moyenne sera $H_o - H_e + \dfrac{dH - dh \cos L \sin Z}{2}$. La table de point servira à calculer $dh \cos L \sin Z$. On ferait de même pour trois ou plusieurs observations.

Exemple : On a eu trois contacts, latitude = 35°.

	HEURES.	diff.	$\times$ cos L	HAUTEURS APPARENTES.	diff.
1°	$3^h35^m20^s$			40°20'00"	
2°	$3^h35^m45^s$	25^s	$20^s,5$	40°25'00"	5'00"
3°	$3^h36^m25^s$	65^s	$53^s,2$	40°31'15"	11'15"

La première observation calculée a donné pour résultats :

$$H_o = 40°31'00''. \quad H_e = 40°40'30'', \quad \text{et } Z = \text{N. } 60° \text{ E.}$$

Le calcul des deux autres observations sera disposé à la droite de la manière suivante :

		DEUXIÈME OBSERVATION.	TROISIÈME OBSERVATION.	
		$17^s,8$	$46^s,1$	dh cos L sin Z
	H_e 40°40'30"	+ 4'27"	+ 11'31"	dh cos L sin Z
	H_o 40°31'00"	+ 5'00"	+ 11'15"	
Z N 60° E	— 9'30"	+ 33"	— 16"	
	+ 6"	+ 17"		
Moyenne	— 9'24"			

Les corrections 4'27" et 11'31" à faire à la première hauteur estimée pour avoir les deux autres ont été obtenues en multipliant les différences 25^s et 65^s par cos L, puis par sin Z, et en transformant en minutes ; elles sont positives parce que l'astre est dans l'Est.

Les corrections à faire au point sont — 9′30″ pour la première observation ; — 9′30″ + 33″ pour la deuxième, et — 9′30″ — 16″ pour la troisième, ce qui donne pour correction moyenne — 9′24″ à porter dans le N. 60° E.

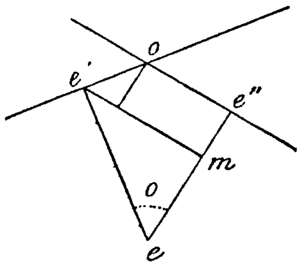


Fig. 13.

Il peut arriver que les deux observations soient prises et calculées en même temps par deux personnes différentes ; dans ce cas, on obtiendra le point de la manière suivante :

Soit (*fig.* 13) e le point estimé qui a servi aux deux calculs ; ee', ee'' les deux corrections obtenues et o le point observé. Menons $e'm$ perpendiculaire à ee''. On a :

$$e'o = \frac{me''}{\sin o} = \frac{ee'' - ee' \cos o}{\sin o} = \frac{ee''}{\sin o} = \frac{ee'}{\operatorname{tg} o} \text{ d'où on tirera } e'o.$$

Le point o sera ensuite obtenu comme d'habitude.

Exemple : Soit 30°10′ N. et 15°25′ O. le point estimé, + 15^{m} au N. 25° E., et — 17^{m} au S. 45° E. les deux corrections trouvées.

Calcul.

Estime.	30°10′00″ N	15°25′00″ O			
. . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .
. . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . . . . .	. . . . . .
Première correction.	13′36″ N	7′18″ E	Z	N 25° E + 15^{m}	$\frac{15}{\operatorname{tg} O} = -\ 5,5$
			Z′	S 45° E — 17^{m}	
			O =	110°	$\frac{-17}{\sin O} = -\ 18,1$
Deuxième correction.	5′18″ N	12′54″ O	V	S 65° E	— $12^{m},6$
Observé	30°28′54″ N	15°30′36″ O			

Quand l'angle d'observation O est égal à 90°, les deux corrections à faire au point sont celles mêmes données par les calculs. Une figure faite à main levée fera éviter les erreurs de signe.

APPROXIMATION DONNÉE PAR LE CALCUL.[1]

Il nous paraît indispensable de pouvoir déterminer, au moins à peu près, l'approximation sur laquelle on peut compter dans un calcul et de savoir ainsi s'il y a lieu de faire un deuxième calcul pour obtenir un point plus approché[1].

[1] On a supposé dans ce qui précède qu'une courbe d'observation se confondait dans la limite des calculs avec la tangente en un point. Cette hypothèse est admissible dans la pratique, sauf le cas toutefois où, la distance zénithale étant petite, la courbure est assez prononcée pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte.

Soit (*fig.* 15 sur la sphère) a et a' les projections terrestres des deux astres, cc, $c'c'$ les deux cercles d'observations déterminant le point

---

Nous allons déterminer d'abord le centre et le rayon de courbure en un point d'une courbe, nous verrons ensuite comment on en tiendra compte dans le calcul.

DÉTERMINATION DU CENTRE ET DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT DONNÉ D'UNE COURBE D'OBSERVATION.

Soit sur la carte (*fig.* A) cc la courbe, z le point donné et a la projection terrestre de l'astre. Menons le vertical de l'astre za, le méridien et le parallèle de z. Les angles se projetant en vraie grandeur, Nza est égal à l'azimuth z de l'astre, l'angle cza est droit et zn, à l'échelle des longitudes, est égal à l'angle horaire P; la tangeante $z\omega$ à za est la normale à la courbe; faisons de même pour un point infiniment voisin z'; le point ω, étant le point de rencontre des deux normales infiniment voisines, est le centre de courbure; le rayon ρ est égal à $z\omega$. L'angle ω est évidemment la différence dz des deux azimuths en z et en z' et zm est la différence dP des deux angles horaires.

Les deux triangles $zz'\omega$ et $zz'm$ donnent :

$zz' = \omega z \times \omega$, $zz' = \dfrac{zm}{\cos z}$, d'où ωz ou $\rho = \dfrac{dP}{dz} \times \dfrac{1}{\cos z}$. Dans le triangle PZA sur la sphère,

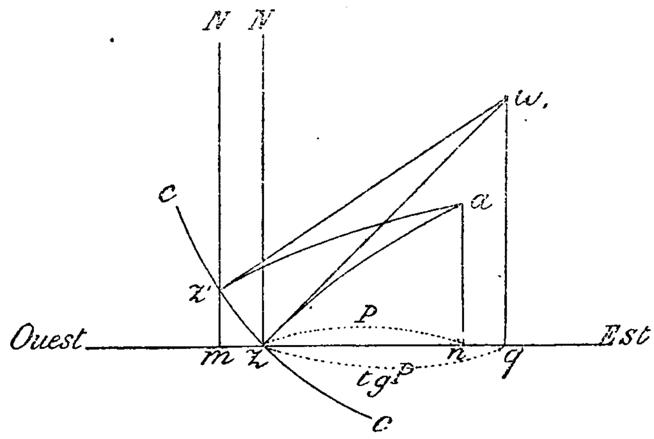


Fig. A.

on a $\dfrac{\sin P}{\sin Z} = \dfrac{\sin N}{\sin \Delta}$, et dans ce cas, $\omega =$ constante; d'où, en différenciant, $\cos P \sin Z\, dP = \cos Z \sin P\, dZ$ ou $\dfrac{dP}{dZ} = \dfrac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{tg} Z}$, d'où en remplaçant $\rho = \dfrac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}$. Il est bien entendu que ρ doit être mesuré sur l'échelle des longitudes. On l'aura en arc en se rappelant que le rayon est égal très-approximativement à l'arc de 57°3, ce qui donnera $\rho^\circ = \dfrac{57^\circ 3 \operatorname{tg} P}{\sin Z}$.

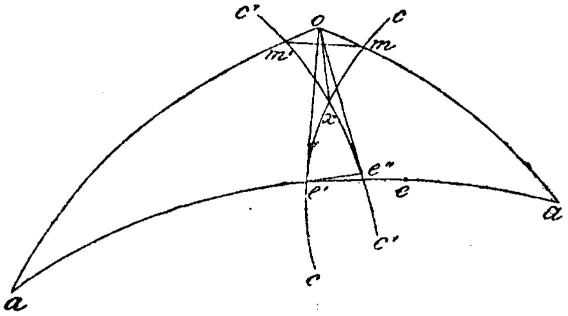
La figure fait voir que les coordonnées de ω seront données par les formules :

$$(L_\omega)_c = (L_z)_c + 57^\circ 3 \frac{\operatorname{tg} P}{\operatorname{tg} Z}, \quad G_\omega = G_z + 57^\circ 3 \operatorname{tg} P$$

Il faut naturellement faire attention à la dénomination de P et au signe de tg P ; de même pour Z et tg Z, si on prend des angles azimuthaux plus grands que 90°.

Si P = 90°, le rayon est infini, le point Z est un point d'inflexion de la courbe.

Si P est égal à 0 ou à 180°, il en est de même de Z; au lieu des rapports indéterminés $\dfrac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}$, vrai x; o le point observé obtenu au moyen des points e', e'' et des tangentes $e'o$, $e''o$. L'erreur sur le point est mesurée par ox et sera



Fig, 14.

notée E. Menons les arcs oa et oa' qui déterminent sur les cercles les points m et m'. En considérant comme plan le petit quadrilatère sphérique $omxm'$, rectangle en m et m', on a ox ou $E = \frac{mm'}{\sin mom'}$,

$$(1) \quad E^2 = \frac{om^2 + om'^2 - 2om \times om' \times \cos mom'}{\sin^2 mom'}.$$

En considérant l'arc loxodromique $e'o$ comme se confondant avec l'arc de grand cercle joignant ces deux points, le triangle $oe'a$ rectangle en e' donne :

$\frac{\text{tg P}}{\text{tg Z}}$, on prendra les rapports égaux et déterminés $\frac{\cos H}{\cos D \cdot \cos P}$, $\frac{\cos H}{\cos D} \times \frac{\cos Z}{\cos P}$, qui se réduisent tous deux à $\frac{\cos H}{\cos D}$ *.

EXEMPLE NUMÉRIQUE.

Soit 25°30′ N et 15°25′ O le point donné ; soit aussi P = 62° E, Z = S 44° E.

Calcul.

	Latitudes.	Latitudes croissantes.	Longitudes.
	Z 25°30′ N.	1583′,2 N.	15°25′ O.
La table de point donne 57°3 tg 62° = 107°7 =	»	»	107°42′ E.
$\frac{107°7}{\text{tg } 44°} = 111°5 =$	»	6690′,0 S.	»
$\frac{107°7}{\sin 44°} = 155° = \rho$	ω 64°29′ S.	5106′,8 S.	92°17′ E.

* Ce qui vient d'être dit n'est que la répétition sous une forme un peu différente de ce que nous avions dit dans une note précédente. On trouvera dans le travail de M. Hilleret, déjà cité, une démonstration plus compliquée, croyons-nous, de la valeur du rayon, basée sur l'équation de la courbe et les formules générales des rayons de courbure. La construction du centre qui y est donnée ne nous paraît pas non plus la plus simple.

$$\operatorname{tg}\frac{(oa - e'a)}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{e'o}{2}}{\operatorname{tg}\frac{oa + e'a}{2}},$$ ou en faisant $e'o = t$ et $e'a$ ou $ma = \mathrm{N}$,

$$\operatorname{tg}\frac{mo}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\mathrm{N}},$$ et comme t et om sont petits, $om = \frac{t^2}{2\operatorname{tg}\mathrm{N}}$ (t est ce qui a été appelé dans les calculs deuxième correction).

On aurait de même $om' = \frac{\overline{e''o}^2}{2\operatorname{tg}\mathrm{N}'}$ et, comme l'on a $e''o = e'o \cos o = t \cos o$, o étant l'angle d'observation $ae'a'$ obtenu au moyen des azimuths calculés des deux astres, il vient $om' = \frac{t^2 \cos^2 o}{2\operatorname{tg}\mathrm{N}'}$. Si on appelle r le rapport $\frac{\operatorname{tg}\mathrm{N}}{\operatorname{tg}\mathrm{N}'}$ la valeur de om devient $om = \frac{t^2}{2r\operatorname{tg}\mathrm{N}'}$. L'angle mom',

---

On construirait le centre soit au moyen de ses coordonnées, soit en menant par le point une ligne vers le S. 44° E. et en y portant 155° de longitude; soit enfin en prenant le point de cette ligne qui se trouve par 92°17′ de longitude E.; ce dernier procédé est le plus expéditif, la ligne étant déjà tracée, comme on le sait, et la table de point donnant à vue la longitude.

CALCUL D'UNE DEUXIÈME APPROXIMATION.

Soient (*fig.* 15) cc, $c'c'$, deux courbes d'observation déterminant le point exact x; soit o un point obtenu par la rencontre des deux tangentes en e' et en e''; t milles la longueur connue de $e'o$, et t' milles la longueur de $e'o$, égale à $\frac{t}{\cos o}$. Soit ω et ω' les centres de courbure des deux courbes; les rayons z, ωo et $\omega' o$ déterminent sur les courbes les points m et m'. Le triangle $e'\omega o$ donne

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{oe'}{\omega o} = \frac{t}{\rho \cos \mathrm{L}},$$

et très-approximativement om en milles

ou $$\alpha = \frac{t}{2}\sin\omega.$$

On aura de même dans le triangle $e''\omega' o$

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{t'}{\rho' \cos \mathrm{L}} = \frac{t \cos o}{\rho' \cos \mathrm{L}},$$

et $$\alpha' = \frac{t\cos o}{2}\sin\omega'.$$

Avec ω et ω', on corrigera les azimuths z et z' des deux observations; ce qui donnera les directions z et z' de $o\omega$ et $o\omega'$. Connaissant en grandeur et en direction om et om', on calculera le point d'intersection des tangentes en m et en m', ainsi qu'il a été indiqué pour le cas où les deux observations ont été calculées avec le même point estimé. Si l'angle d'observation o est convenable, il arrivera le plus souvent que t' sera petit et par suite α' négligeable.

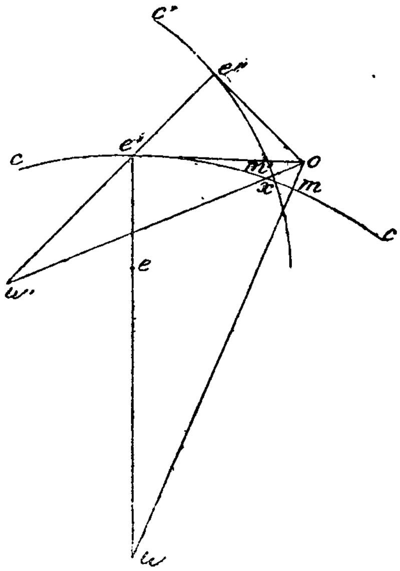


Fig. 15.

qui est l'angle d'observation corrigé, peut différer notablement de $ae'a'$ ou o; on aura cependant une approximation suffisante en considérant ces deux angles comme égaux. Remplaçant om, om' et l'angle mom' par leurs valeurs dans la formule (1), il vient

$$E = \frac{t^2}{\operatorname{tg} N'} \frac{\sqrt{1 + r^2 \cos^4 o - 2r \cos^3 o}}{2r \sin o} = \frac{t^2}{\operatorname{tg} N'} \times K.$$

La table suivante donne le coefficient K pour différentes valeurs de r et de o; pour les valeurs de r plus petites que l'unité, le coefficient a été multiplié par r, de façon qu'on ait toujours à prendre le rappport de t^2 à la tangente de la plus petite distance zénithale. Dans la pratique, le rapport $\frac{\operatorname{tg} N}{\operatorname{tg} N'}$ sera remplacé par $\frac{N}{N'}$ et se prendra tout à fait à vue. De même au lieu de $\frac{t^2}{\operatorname{tg}(N \text{ ou } N')}$, on prendra $\frac{t^2}{N \text{ ou } N'}$, la distance zénithale étant exprimée en minutes puisque t est exprimé en milles; E sera donné en milles. Il ne faut pas oublier que N est toujours la distance zénithale vraie du premier calcul et N′ celle du deuxième.

Ce qui vient d'être dit suppose que l'on veut une exactitude dont il n'est nullement besoin dans la pratique.

Si par hasard on tenait à un point parfaitement rigoureux, le plus simple serait de renoncer aux calculs de fausse position et de faire le calcul direct. On sait que, dans ce cas, on ramène la première hauteur au moment de la deuxième au moyen de la route dans l'intervalle et du relèvement du premier astre, observé ou calculé. On résout ensuite le quadrilatère sphérique $Paa'x$ dans lequel a et a' sont les projections des deux astres, P le pôle et x le point vrai. ax et $a'x$ sont égaux avec deux distances observées; l'angle P est égal à la différence des longitudes terrestres des deux astres. Le triangle Paa' donne aa' et l'un des angles en a et en a'; le triangle $aa'x$ donne ensuite l'angle correspondant en a ou en a'; enfin, l'un des deux triangles Pxa ou Pxa' donne la colatitude Px et l'un des angles en P, duquel on déduit la longitude. On a imaginé différentes simplifications à ce calcul qu'on appelle généralement et à tort, croyons-nous, calcul de la latitude par deux hauteurs et l'intervalle; c'est le calcul du point dans toute sa généralité et l'intervalle en temps entre les observations n'a rien à y voir, sauf le cas particulier où le soleil a été observé deux fois et où l'angle P est égal à l'intervalle en temps vrai.

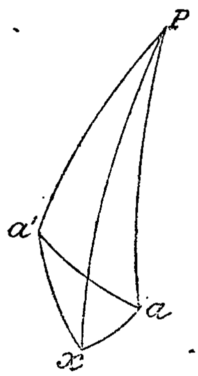


TABLE.

TABLE D'APPROXIMATION $E = \frac{t^2}{N \text{ ou } N'} \times K$.

Angle d'observation O.

$\frac{\text{tg N}}{\text{tg N}'}$ ou $\frac{N}{N'}$.	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
0	19.	10	7	6	5	5	5	6	7	10	19
1/8	17	9	»	5.	»	»	»	»	7.	11	21.
1/4	15	8.	6.	»	»	»	»	»	»	11.	23
1/3	13.	8	»	»	»	»	»	»	8	12	25
1/2	11	7	6	»	»	»	»	»	8.	13.	28
2/3	8.	6	5.	»	»	»	»	6.	9	14.	31
1	5	5	5	5	»	»	»	»	10	17	37
3/2	6.	4	3.	3.	3.	3.	3.	4.	7.	13.	31
2	9	»	2.	2.	2.	2.	2.	4	6.	12	27.
3	12	5	»	2	1.	1.	1.	3	5.	10.	24.
4	13.	5.	»	1.	»	1	»	2.	5	9.	22
8	15	6.	3	»	0	0.	0.	2	4.	8.	20.
∞	18	7.	»	»	»	0	»	»	3.	7.	18

Le coefficient K est donné en dixièmes. Un point à la suite d'un nombre indique qu'il faut prendre un demi-dixième en plus. Le signe » indique qu'il faut prendre le nombre supérieur de la même colonne.

Exemple : Soit $N = 7°20'$, $N' = 2°10'$, $O = 130°$ et $t = 30$ milles; la table donne $K = 4$, d'où $E = \frac{30^2}{130} \times 0{,}4 = 2^m{,}7$.

Deuxième exemple : Calcul de la page 362. $N = N' = 60°$, $O = 29°$ $t = 47^m{,}4$; dans ce cas $\frac{N}{N'} = 1$; la table donne $K = 5$, d'où $E = \frac{(47{,}4)^2}{3600} \times 0{,}5 = 0^m{,}3$. L'erreur a été exactement d'un demi-mille.

Troisième exemple : Calcul de la page 364. $N = 6°23'$, $N' = 5°45'$, $O = 79°$, $t = 23^m{,}2$ · $\frac{N}{N'}$ est un peu plus grand que 1; la table donne $K = 4$, d'où $E = \frac{(23{,}2)^2}{345} \times 0{,}4 = 0^m{,}6$, qui est l'erreur même du calcul.

L'examen de la table montre, ce qu'on trouverait du reste en discutant la formule :

1° Que l'angle d'observation le plus favorable au calcul est l'angle de 90°;

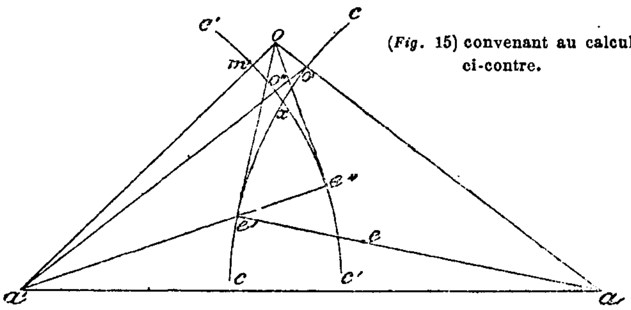
2° Qu'un angle d'observation aigu est préférable à un angle obtus, c'est-à-dire qu'il vaut mieux avoir un angle de 30° qu'un angle de 150°.

3° Qu'il est préférable de calculer d'abord la grande distance zénithale et ensuite la petite.

La table fait voir aussi que K va rapidement en augmentant lorsque l'angle d'observation est plus petit que 45° ou plus grand que 135°; il faudra donc, autant que possible, se tenir en dedans de ces limites.

Il est bien entendu que l'erreur E que nous venons de calculer ne représente que l'erreur sur le point provenant du calcul et nullement celle qui peut découler d'erreurs sur les hauteurs. On sait que, eu égard aux erreurs de hauteurs, l'angle d'observation le plus favorable est aussi de 90°.

Deuxième approximation. — Quand l'approximation obtenue au moyen de la table précédente ne paraîtra pas suffisante, il faudra recommencer le calcul avec le point obtenu comme point estimé. Le deuxième calcul ne sera nécessaire que si l'une ou les deux distances zénithales sont petites, ou bien dans le cas d'un angle d'observation très-défavorable. *Exemple :*



(*Fig.* 15) convenant au calcul ci-contre.

e	point estimé.					
ee'	première correction...	=	$-40^m,9$	au	S 72°	E
$e'e''$		=	$-42^m,5$	au	S 63°,5	O
$e'o$	deuxième correction..	=	$-60^m,6$	au	S 18°	O
o	point observé.					
oo'	(première correction)$_1$.	=	$7^m,4$	au	S 58°	E
$o'o''$ =			$6^m,8$	au	S 54°	O
$o'x$	(deuxième correction)$_1$.		$7^m,3$	au	S 32°	O
x	(point observé)$_1$. Le point réellement obtenu est le point de rencontre des tangentes en o' et en o''.					

CALCUL.

CALCUL DE DOUBLE APPROXIMATION.

S'estimant par 11°00' nord et 25°42' ouest, on a eu :

		Dist. zénith. ⊖	Déclin. ⊖	G ⊖ ou heure vr. de Paris.
DONNÉES..	1re observation.	3°54'18"	10°00'00" N	22°35'00" O
	2me observation.	3°25'24"	10°00'18" N	28°50'00" O

Pas de déplacement du bâtiment dans l'intervalle.

Calcul.

$$\begin{cases} \varphi(N) = \varphi(P) \cos L \cos D + \varphi(D-L) \\ \sin Z = \dfrac{P \cos D}{N}. \end{cases}$$

		LATITUDES.	LONGITUDES.				DISTANCES.
1re APPROXIMATION.	Estime	11°00',0 N	25°42',0 O	φ (P) 305,1	294,8	=	φ (P) cos L cos D
				× cos L 299,5			
	1er astre.............	10°00',0 N	22°35',0 O	φ (D − L) =	31,4		
	Différence..........	1°00',0 S	3°07',0 E	φ (N_e) =	326,2		3°13',4 = N_e
							3°54',3 = N_o
	1re correction	12',7 N	39',6 O	Z S 72°	E		— 40'9
	Point rectifié.	11°12',7 N	26°21',6 O	192,2	185,7		
				188,6			
	2me astre	10°00',3 N	28°50',0 O		45,7		
	Différence..........	1°12',4 S	2°28',4 O		231,4		2°42',9 N'_e
							3°25',4 N'_o
				Z' S 63°,5	O		— 42',5
	2me correction......	57',6 N	19',1 E	V S 18°	O		— 60',6
	Point observé	12°10',3 N	26°02',5 O	45°,5			$E = \frac{3670}{208} \times 0{,}9 = 16^m$
2me APPROXIMATION.	Diff. avec 1er astre .	2°10',3 S	3°27',5 E	375,6	361,7		
				367,2	148,1		
					509,8		4°01',7
	1re correction	3',9 S	6',5 E	Z_1 S 58°	E		+ 7',4
	(Point rectifié)......	12°06,4 N	25°56',0 O	264,2	254,3		
				258,2	138,5		
	Diff. avec 2me astre.	2°06',1 S	2°54'0 O		392,8		3°32',2
				Z'_1 S 54°	O		+ 6',8
	2me correction......	6'2 S	4',0 O	V_1 S 32°	O		+ 7',3
	(Point observé).....	12°00',2 N	26°00',0 O	22°			

Le calcul de l'approximation ayant donné 16 milles pour l'erreur E, on a refait le deuxième calcul, qui a donné un point à 2/10 de mille près, le point exact étant 12° N. et 26° O. La table a donné une correction trop forte, parce que l'angle d'observation vrai n'est que de 112°, tandis que le même angle obtenu par les deux premiers azimuths est de 135°.

Dans le cas de distances zénithales petites, on pourra obtenir facilement une deuxième approximation en agissant comme on le ferait sur un plan. On calculera le changement ΔZ du premier azimuth entre le point a et le point o (*fig.* 15), ce changement est égal à l'angle oae', et est donné par la formule $\operatorname{tg} \Delta Z = \frac{oe'}{e'a} = \frac{t}{N}$; on obtiendra ainsi le premier azimuth corrigé Z_1 ; oo' ou α sera donné par la formule $\alpha = \frac{t}{2} \sin \Delta Z$; on obtiendra de même le changement $\Delta Z'$ du deuxième azimuth, ainsi que om' ou α' par les formules $\operatorname{tg} \Delta Z' = \frac{oe''}{o'e''} = \frac{t \cos o}{N'}$ et $\alpha' = \frac{t}{2} \cos o \sin \Delta Z'$; connaissant om' et oo' en grandeur et en direction, on calculera le point de rencontre des tangentes en o' et en m' comme il a été dit page 368 ; ces calculs se font à vue avec la table de point. Appliquons cette méthode au calcul précédent :

1re APPROXIMATION.	. . . .					
	. . . .					N_0 3°54′
	. . . .			Z	S 72° E	
	. . . .					N'_0 3°25′
	. . . .			Z′	S 63°,5 O	
	. . . .			V	S 18° O	$-60^m6 = t$
	Point observé. .	12°10′,3 N	26°02′,5 O		45°,5	
				ΔZ	15°	
2me APPROXIMATION.	1re correction...	4′2 S	6′,6 E	Z_1	S 57° E	$\alpha = 7^m,8 \frac{\alpha}{\operatorname{tg} O'} = -2^m,5$
				ΔZ′	12°,5	
				Z'_1	S 51° O	$\alpha' = 4^m,5 \frac{\alpha'}{\sin O_1} = +4^m,7$
				O_1	108°	
	2me correction..	6′0 S	4′,0 O	V_1	S 33° O	différence $+7^m,2$
	(Point observé)$_1$	12°00′.1 N	25°59′,9 O			

Le sens des changements ΔZ et $\Delta Z'$ se voit facilement par celui de la deuxième correction t.

MARCQ SAINT-HILAIRE,
Capitaine de frégate.

(*La fin prochainement.*)

CALCUL DU POINT OBSERVÉ[1]

(FIN [2].)

POINT MOYEN DONNÉ PAR TROIS OBSERVATIONS.

Supposons les deux premières observations calculées et ayant donné comme point ramené par l'estime, s'il y a lieu, au troisième moment,

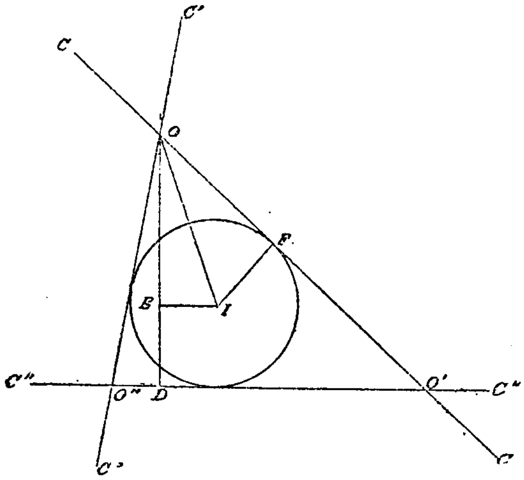


Fig. 16.

le point o (*fig.* 16). Soit cc, $c'c'$ les droites de ces deux observations perpendiculaires, comme on sait, aux azimuths Z et Z'. Avec le point o,

[1] Insérè dans la *Revue* par décision du ministre, sur la proposition de la commission centrale d'examen des travaux des officiers.
[2] Voir la *Revue* d'Août.

calculons la troisième observation. Soit d et Z'' la correction et l'azimuth obtenus par le calcul ; portons dans la direction de Z'' oD égal à d, la perpendiculaire $c''c''$ est la droite de la troisième observation qui détermine avec les deux premières les points o' et o''. Si on admet que les trois observations ont été prises avec la même exactitude, qu'il n'y a pas lieu d'accorder plus de confiance à l'une qu'à l'autre, si on leur donne, en un mot, le même poids, on doit adopter, comme point, un point également éloigné de chacune des droites et aussi rapproché d'elles que possible, c'est-à-dire le centre I du cercle inscrit au triangle, qui satisfait à ces deux conditions, et non pas, comme on pourrait le croire, le point que l'on obtiendrait en prenant la moyenne des coordonnées des trois points o, o', o'', ce qui donnerait le centre de gravité du triangle.

Voyons à calculer oI ; menons IE perpendiculaire à oD. On a oD ou $d = o\mathrm{I}\cos \mathrm{E}o\mathrm{I} + \mathrm{ED}$; or, $\mathrm{E}o\mathrm{I} = \dfrac{o''-o'}{2}$; ED $=$ rayon du cercle inscrit $= \mathrm{IF} = o\mathrm{I}\sin\dfrac{o}{2} = o\mathrm{I}\cos\dfrac{o''+o'}{2}$, remplaçant $d = o\mathrm{I}\left(\cos\dfrac{o''-o'}{2} + \cos\dfrac{o''+o'}{2}\right)$ d'où $o\mathrm{I} = \dfrac{d}{2\cos\frac{o'}{2}\cos\frac{o''}{2}}$. o' et o'' sont respectivement les angles (ou leurs suppléments) de la troisième observation avec la première et avec la deuxième et sont connus, oI étant la bissectrice de l'angle oa une direction également connue. Connaissant les coordonnées de o, la grandeur et la direction de oI, on déterminera les coordonnées de I par un calcul de point estimé.

Le rayon R du cercle est égal à $o\mathrm{I}\sin\dfrac{o}{2}$, ou $\mathrm{R} = \dfrac{d\sin\frac{o}{2}}{2\cos\frac{o'}{2}\cos\frac{o''}{2}}$. Si on refaisait les calculs en corrigeant les hauteurs d'une quantité égale à R, en plus si l'astre correspondant et le centre I sont du même côté de la droite d'observation, en moins dans le cas contraire, les trois observations seraient d'accord et donneraient le point I comme résultat.

Pour éviter les erreurs sur les angles, il faudra s'aider d'une figure faite à main levée ou suivre la règle suivante : Prendre les deux azimuths V',V'' perpendiculaires à Z et à Z' et faisant un angle aigu avec Z''; la bissectrice de V' et de V'' donnera la direction de oI; l'angle de V' et de V'' donnera l'angle o du triangle; on choisira pour o' et o'' les deux autres angles d'observation ou leurs suppléments, de façon que leur somme, ajoutée à l'angle o, donne 180°.

Exemple numérique. (Voir la figure 17.)

Azimuth de la 1re observation			Z	= N 38° O	
— 2e —			Z'	= N 16° O	
Point observé ramené au 3e moment......	L = 12°00',0 N	26°00',0 O			
3e observation			Z''	S 20° O	$d = + 8^m,6$
			V_1	S 52° O	$o' = 58°$ ou $122°$ $\frac{o'}{2} = 61°$
			V_2	S 74° O	$o'' = 36°$ ou $144°$ $\frac{o''}{2} = 18°$
			O	22°	$\frac{4^m,3}{\cos 61°} = 8^m,9$ $\frac{8^m,9}{\cos 18°} = 9^m,4$
OI	4'3 S	8',6 O	V_m	S 63° O	$+ 9^m,4$
Point moyen....... I	11°55',7 N	26°08',6 O			$R = 9^m,4 \sin \frac{o}{2} = 1^m,8$

Les deux valeurs que peuvent avoir les angles o' et o'' ont été obtenues avec les azimuths Z, Z'' et Z', Z''. On a choisi 122° et 36°, qui sont les valeurs de o' et de o'' dont la somme, ajoutée à l'angle o, donne 180°. Le rayon a été trouvé égal à $1^m,8$; en corrigeant les trois hauteurs de 1',8 dans le sens convenable, en plus pour la première et en moins pour les deux autres, les trois observations s'accorderaient et donneraient comme résultat le point I. Nous avons choisi avec intention des observations prises dans de mauvaises conditions; les deux premières font un angle très-défavorable de 22°; aussi un changement de 1',8 sur chacune des deux hauteurs fait-il varier le point de $9^m,4$. Lorsqu'on a trois observations ne s'accordant pas, on a recherché l'erreur des hauteurs en la supposant égale et de même sens sur chacune d'elles. M. Pagel s'est occupé de cette question dans son premier ouvrage; en voici une solution très-simple.

Supposons le triangle d'observation tracé ainsi que nous venons de le faire. On peut mener aux trois droites quatre circonférences tangentes, y compris celle du cercle inscrit; il suffira de choisir, parmi les quatre, celle dont le centre se trouve à la fois, pour chacune des observations, du même côté de la droite que l'astre correspondant, ou du côté opposé ; autrement dit, si on appelle *côté positif* d'une droite d'observation celui qui fait face à l'astre, et *côté négatif* le côté opposé, il faudra choisir la circonférence dont le centre se trouve à la fois, pour les trois observations, du même côté des droites, positif ou négatif. Ce problème comporte toujours une solution et n'en comporte qu'une. Le rayon du cercle sera la correction commune à faire aux hauteurs, le sens en sera indiqué par la position du centre, elle sera à ajouter ou à retrancher selon que le centre sera du côté positif ou du côté négatif des droites ; le centre lui-même sera la position que l'on obtiendrait si on refaisait les calculs avec les hauteurs corrigées.

Soit I_1 le centre du cercle et R_1 son rayon ; on démontrerait de la même manière que pour le cercle inscrit que l'on a :

$$oI_1 = \frac{d}{2 \sin \frac{o'}{2} \sin \frac{o''}{2}} \text{ et } R_1 = \frac{d \cos \frac{o}{2}}{2 \sin \frac{o'}{2} \sin \frac{o''}{2}};$$

d représentant toujours la correction donnée par le troisième calcul, c'est-à-dire la hauteur du triangle comptée du sommet o, et les angles o, o', o'' étant, non plus les angles du triangle, mais les angles mêmes d'observation, c'est-à-dire l'écart des verticaux d'observation Z et Z', Z et Z'', Z' et Z''. La direction de oI_1 sera toujours l'opposé de la direction moyenne des azimuths Z et Z'. Il faudra dans le calcul faire attention au signe de d qui peut être négatif ; la correction à faire aux hauteurs est toujours du signe contraire à d.

Exemple numérique.

On a eu trois observations : les deux premières ont donné pour point ramené au moment de la troisième, $L_1 = 12°00',0$ N., $G_0 = 26°00'0$ O., les azimuths de ces deux observations étant Z = N. 38° O. Z' = N 16° O. ; la troisième observation calculée avec le point o a donné comme correction $+ 8^m,6$, son azimuth Z'' étant S. 20° O. ; on demande quelle est la correction égale et de même signe qu'il faut faire à chacune des hauteurs pour que les observations soient d'accord et quel est le point corrigé.

Calcul.

1re observation			Z N 38° O	
2e observaion			Z′ N 16° O	
Point observé ramené au 3e moment	12°00′,0 N	26°00′,0 O		
3e observation			Z″ S 20° O	$+ 8^m,6 = d$
				O=22°, O′=122°, O″=144°
				$\frac{4^m,3}{\sin 61°} = 4^m,9 \; \frac{4^m,9}{\sin 72°} = 5^m,1$
				$+5^m,1$ R=$5^m,1 \cos 11° = 5^m,0$
OI_1	4′,7 S	2′0 E	V_1 S 22° E	Correction des hauteurs — 5′0
Point corrigé...... I_1	11°55′,3 N	25°58′,0 O		

Les données de ce calcul sont les mêmes que celles du précédent; la figure 17 ci-jointe convient aux deux calculs; les flèches indiquent les directions des astres et marquent ainsi les côtés positifs des droites d'observations cc, $c'c'$, $c''c''$.

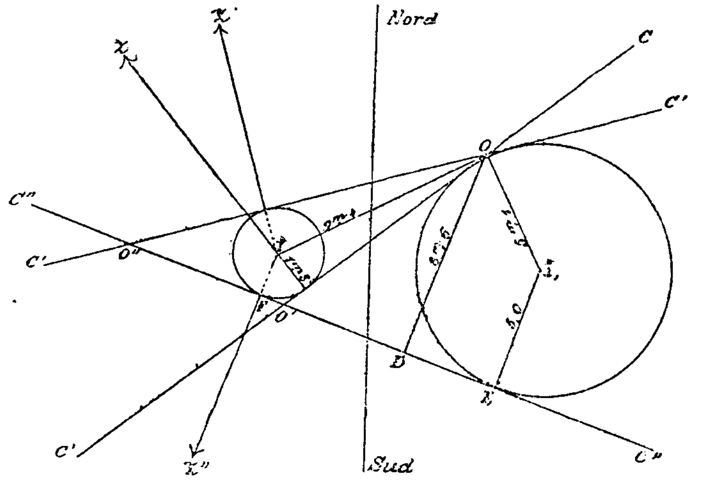


Fig. 17.

La circonférence inscrite est tangente au côté positif de la première droite et aux côtés négatifs de la deuxième et de la troisième. La circonférence en I_1 est tangente aux trois côtés négatifs.

On voit quelle différence il s'ensuit sur la correction du point, soit qu'on adopte sur les hauteurs une erreur minimum et égale sans tenir compte du sens de cette erreur, soit qu'on suppose que les hauteurs sont erronées de la même quantité et dans le même sens. Rien n'autorise cette seconde hypothèse, la première nous paraît plus logique.

Quand les trois directions IZ, IZ′, IZ″ sont telles que l'une d'elles, prolongée, passe dans l'angle formé par les deux autres, le cercle de correction égale est le même que celui de correction minimum et devient le cercle inscrit au triangle.

Si on croyait ne pas devoir accorder la même confiance à chacune des trois observations, on pourrait, à la rigueur, admettre une proportion donnée sur les erreurs des trois hauteurs et calculer le point dont la distance aux droites serait dans la proportion voulue, tout en étant le plus près possible de ces droites ; mais ce serait sortir tout à fait du domaine pratique. Dans ce cas, on construira le triangle d'observation et on se placera à vue dans l'intérieur en se rapprochant de l'observation qui présente le plus de garantie et en s'écartant des autres, selon leur degré présumé d'exactitude.

Des erreurs sur les hauteurs.

Dans la pratique, les hauteurs sont toujours entachées de certaines erreurs qu'on ne connaît pas, mais dont on peut toujours apprécier la limite, c'est-à-dire un maximum, que ces erreurs ne dépassent pas dans un sens ou dans l'autre. Nous allons examiner l'influence de ces erreurs et déterminer la limite d'erreur du point en admettant des limites données sur les erreurs de hauteur.

Il est évident d'abord que, pour une observation, l'erreur sur le résultat est l'erreur même de la hauteur, c'est-à-dire que le lieu du point déterminé par l'observation passe à une distance du point vrai égale à l'erreur de la hauteur, vers l'astre si la hauteur est trop grande, et à l'opposé si elle est trop petite, et que par suite la limite d'erreur du résultat est la même que celle de la hauteur. Ainsi, si en tenant compte de toutes les causes d'erreur, on est sûr de la hauteur à 2′ près en plus ou en moins, on sera sûr aussi que le point vrai est à 2 milles au plus d'un côté ou de l'autre de la droite d'observation obtenue *cc*, et qu'il se trouve par suite sur une bande telle que MNPQ, ayant 4 milles d'épaisseur.

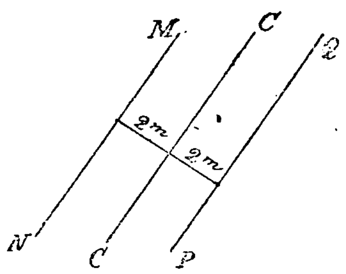


Fig. 17 a.

Prenons maintenant deux observations et admettons que les deux hauteurs soient erronées l'une de α, l'autre de α', déterminons l'erreur E qui en résulte sur le point. Soit (*fig.* 18 sur la carte) o le point obtenu, oZ, oZ' les directions des verticaux d'observation ; l'angle o est l'angle d'observation. En prenant dans le sens convenable $om = \alpha$ et $om' = \alpha'$ et en menant les perpendiculaires, on obtient les deux droites corrigées d'observation qui déterminent, par leur intersection, le point vrai x. L'erreur E est égale à ox. Or, l'on a :

$$ox = \frac{mm'}{\sin o}, \text{ donc } E = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 - 2\,\alpha\alpha' \cos o}}{\sin o}.$$

La valeur minimum de E correspond à la valeur de o donnée par $\cos o = \frac{\alpha}{\alpha'}$ ou $\frac{\alpha'}{\alpha}$, selon que $\alpha <$ ou $> \alpha'$, les valeurs correspondantes de E étant α ou α'. Si on connaissait les erreurs α et α' sur les hauteurs, on pourrait en conclure l'angle d'observation le plus favorable ; et inversement, l'angle d'observation et l'une des erreurs de hauteur étant connus, on pourrait savoir l'erreur qu'il faut commettre sur l'autre hauteur pour avoir une erreur minimum sur le point. Mais il n'y a aucune conclusion à tirer de ce fait, car les erreurs de hauteurs ne sont nullement à la disposition de l'observateur et restent inconnues.

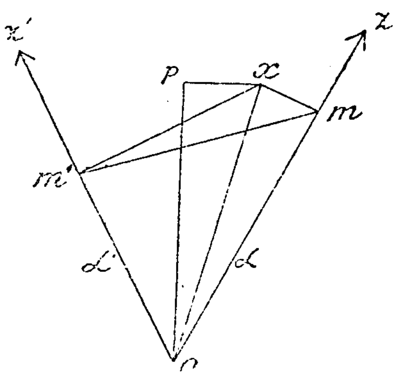


Fig. 18.

Quand α et α' sont égaux et de même signe, la valeur de E devient $E = \frac{\alpha}{\cos \frac{o}{2}}$ et la direction de ox est la bissectrice de l'angle d'observation ; dans ce cas, E diminue en même temps que l'angle o et atteint sa valeur minimum α pour $o =$ zéro.

En s'appuyant sans doute sur des considérations semblables à celles qui précèdent, et en admettant l'égalité probable des erreurs sur les deux hauteurs, on a affirmé qu'on devait obtenir de bons résultats avec des angles d'observation petits et que, par exemple, deux observations circumméridiennes correspondantes devaient donner une longitude excellente ; une brochure a même été faite dans ce dernier sens. Cela ne nous paraît pas exact. Il est vrai que, quelles que soient les erreurs de hauteurs, si on les suppose mathématiquement égales, deux observations correspondantes, aussi voisines du méridien qu'on voudra, donneront une longitude parfaitement exacte ; en effet, dans ce cas, la bissectrice oP de l'angle o est le méridien lui-même, l'erreur en longitude est $xP = \dfrac{\alpha - \alpha'}{2 \sin \frac{o}{2}}$, l'erreur en latitude est $oP = \dfrac{\alpha + \alpha'}{2 \cos \frac{o}{2}}$. Si $\alpha = \alpha'$, l'erreur en longitude devient nulle de même que l'erreur en latitude si $\alpha = - \alpha'$; mais rien ne dit que ces deux erreurs sont égales, de même signe ou de signe contraire ; tout ce que l'on sait, c'est que leur somme ou leur différence ne dépasse pas la somme arithmétique des erreurs maxima des hauteurs.

Ainsi, si l'une des hauteurs est à $3'$ près, l'autre à $2'$, tout ce que l'on peut affirmer c'est que l'erreur en longitude atteint au plus $\dfrac{5^m}{2 \sin 1/2\, o}$ et l'erreur en latitude $\dfrac{5^m}{2 \cos 1/2\, o}$; comme $\sin 1/2\, o$ est plus petit ou plus grand que $\cos 1/2\, o$ selon que $o <$ ou $> 90°$, on peut dire que (dans le cas de hauteurs correspondantes où nous nous sommes mis) plus l'angle o est petit et plus il est probable que le point est bien déterminé en latitude et mal en longitude ; si $o = 90°$, c'est-à-dire dans le cas d'observations prises à 45° d'azimuth de chaque côté du méridien, la latitude et la longitude sont également bien déterminées ; si les observations sont prises au delà de 45° d'azimuth, c'est-à-dire si l'angle o est obtus, la longitude est mieux déterminée que la latitude.

Au point de vue pratique, la question n'est pas de déterminer l'erreur sur le point pour des erreurs données sur les hauteurs, puisque ces dernières sont inconnues, mais bien de savoir quelle est la limite d'erreur sur le point pour des limites d'erreurs sur les hauteurs, limites que l'on peut apprécier. C'est ce qui va être examiné.

Soient α et α' les limites d'erreur des hauteurs, soit o (*fig.* 19) le point observé et oz et oz' les verticaux des deux astres ; en portant sur oz et oz', om et om_1, om' et om'_1 respectivement égaux à α et α', et en menant les perpendiculaires, on détermine un parallélogramme MNPQ qui contient certainement le point vrai. L'erreur maximum E du point o, c'est-à-dire la limite de cette erreur, est la moitié de la grande diagonale MP de ce parallélogramme, et l'on a ;

$$E = oM = \frac{mm'_1}{\sin o} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos o}}{\sin o}$$

le terme $2\alpha\alpha' \cos o$ étant toujours à ajouter, quel que soit le signe de $\cos o$. Si on suppose que la première hauteur est à 2′ près, la deuxième à 3′, et l'angle d'observation égal à 20° ou à 160°, on trouve que E est égal à $14^m,1$; le point obtenu pourra dans ce cas être erroné de $14^m,1$ au plus, et cela aura lieu si les erreurs de hauteur ont atteint leur limite, dans le même sens pour $o = 160°$, et en sens contraire si $o = 20°$; on n'a donc le point qu'à $14^m,1$ près. Si, pour les mêmes valeurs de α et de α', l'angle o avait été égal à 90°, on aurait eu le point à $3^m,6$ près.

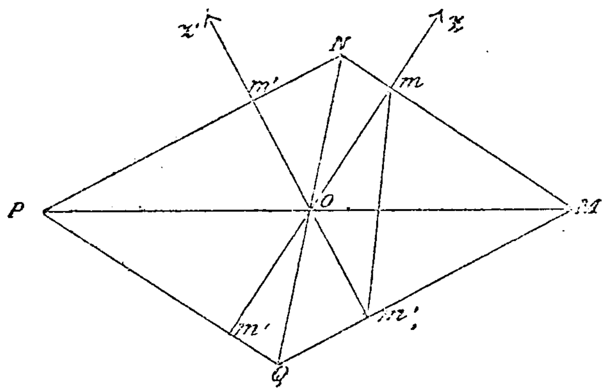


Fig. 19.

E diminue en même temps que α et α' et à mesure que o se rapproche de 90°. Donc cette règle bien simple : observer du mieux qu'on peut et autant que possible dans les environs de 90° d'angle. Cette règle est générale, quel que soit le mode de calcul employé; on a vu que pour le calcul des hauteurs estimées la condition d'angle était la même.

Les droites oN et oM partagent l'angle d'observation et son supplémentaire en deux parties dont les cosinus sont proportionnels à α et à α' et deviennent les bissectrices de ces angles si l'approximation des hauteurs est la même ; l'examen de la figure fait voir que l'erreur maximum du point a lieu dans la direction de la bissectrice de l'angle d'observation ou de son supplémentaire, selon que cet angle est obtus ou aigu.

DES ERREURS D'ESTIME.

Le déplacement du bâtiment dans l'intervalle des observations est, comme les hauteurs, un des éléments du point observé, élément entaché d'erreurs provenant soit d'une mauvaise estime de la route ou de la vitesse, soit du courant. Nous allons examiner l'influence de ces erreurs. Il est évident, tout d'abord, que plus les observations sont rapprochées et moins on est soumis à leur action, qui devient nulle si les observations sont simultanées et prises au moment pour lequel on veut le point. Il faut donc, au point de vue des erreurs provenant de l'estime et du courant dans l'intervalle, rapprocher les observations autant que possible de ce moment. Cette condition se trouvera généralement en désaccord avec la condition d'angle donnée pour les observations ; c'est une juste balance entre les deux qui fera qu'on sera dans de bonnes circonstances ; les meilleures seraient d'avoir deux observations à angle droit au moment même où l'on veut le point.

Déterminons d'une manière plus précise l'influence des erreurs d'estime. Soit A (*fig.* 20) le point rectifié par la première observation et cc

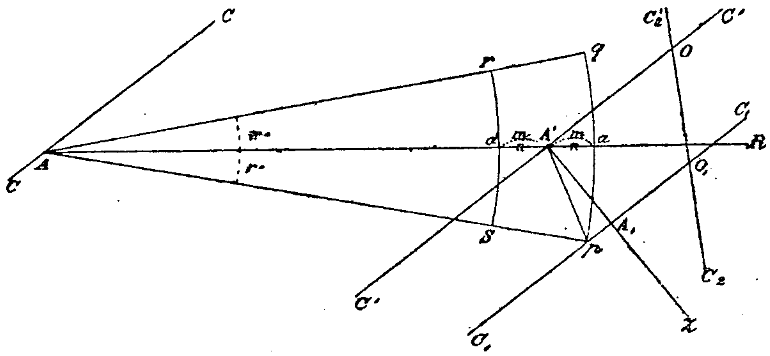


Fig. 20.

la droite d'observation. Soit m le chemin parcouru et R la route suivie dans l'intervalle (pour plus de simplicité nous supposons qu'il n'y ait qu'une route); en prenant $AA' = m$ dans la direction de R et menant $c'c'$ parallèle à cc, on obtient la droite de la première observation ramenée au moment de la deuxième, et qui détermine avec celle-ci le point observé pour ce moment. Admettons que la vitesse n'ait été estimée qu'à $\frac{1}{n}$ près et la route à r° près ; menant les deux droites qui font avec AR de chaque côté un angle égal à r° et décrivant les arcs de cercle du point A comme centre avec $m + \frac{m}{n}$ et $m - \frac{m}{n}$ comme rayons, on détermine la surface $pqrs$ qui contient certainement le point A exactement ramené au moment de la deuxième observation. L'erreur maximum du point A′ est égal à $A'p$; en menant par p, c_1c_1 parallèle à $c'c'$, le maximum d'erreur de la droite $c'c'$ est égal à la distance $A'A_1$ de ces deux droites ; or l'on a $A'A_1 = A'a \cos RA'A_1 + ap \sin RA'A_1$, et en appelant ω l'angle $RA'A_1$ du vertical de la première observation avec la route, on trouve que la limite d'erreur de la première observation, ramenée au moment de la deuxième, est égale à $\frac{m}{n}\cos\omega + m \sin r \sin\omega$; le terme $\frac{m}{n}\cos\omega$ étant toujours à ajouter, quel que soit le signe de $\cos\omega$. Soit maintenant c_2c_2 la droite de la deuxième observation, le point o est le point obtenu et sa limite d'erreur est mesurée par oo_1 qui est égale à $\frac{A'A_1}{\sin o}$. En résumé, l'erreur maximum E, sur le point observé, provenant des erreurs d'estime dans l'intervalle, sera :

$$E = \frac{\frac{m}{n}\cos\omega + m \sin r \sin\omega}{\sin o}.$$

Prenons un exemple numérique, en nous mettant autant que possible dans les conditions de la pratique.

Soit $m = 30$ milles le chemin parcouru dans l'intervalle et le S. 60° E. la route suivie R. La première observation a été prise au S. 20° E. = Z et la deuxième au S. 40° O. = Z′. La vitesse a été estimée à $^1/_{20}$ près $= ^1/_n$ et la route à 3° près $= r^\circ$. L'angle ω de la route, avec la première observation, est de 40°, et l'angle d'observation o est de 60°. L'on a :

$$E = \frac{\frac{30}{20}\cos 40^\circ + 30 \sin 3^\circ \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1^m,15 + 1^m,03}{\sin 60^\circ} = \frac{2^m,18}{60^\circ} = 2^m,5.$$

Ainsi, rien que par suite des erreurs possibles sur l'estime, le point obtenu peut être erroné au maximum de $2^m\ 1/2$.

Si $\omega = 90°$, le terme $\frac{m}{n}\cos\omega$ disparaît; si au contraire $\omega = 0°$, c'est le terme $m \sin r \sin \omega$ qui devient nul; donc, si la première observation est prise par le travers, l'estime de la vitesse importe peu, et c'est sur la route qu'il faut porter son attention; si au contraire la première observation est prise de l'avant ou de l'arrière, l'erreur de route n'a plus d'influence et c'est la vitesse qu'il faut estimer avec soin. Dans une première note dont celle-ci n'est que le développement, nous avons proposé d'appeler les observations prises par le travers *observations de direction*, et celles prises de l'avant ou de l'arrière *observations de vitesse*. Ces deux dénominations nous paraissent convenir aux résultats obtenus. Les observations de direction font voir si l'on est jeté à droite ou à gauche de la route, celles de vitesse si l'on est avancé ou retardé sur la route.

Si au lieu de calculer le point pour l'heure de la deuxième observation, on le calculait pour l'heure moyenne des deux observations, les limites d'erreurs sur les deux hauteurs, provenant des erreurs d'estime, seraient toutes deux égales à la moitié de la limite qui a été trouvée, c'est-à-dire à $\frac{m}{2n}\cos\omega + \frac{m}{2}\sin r \sin\omega$, et, dans le cas de l'exemple numérique, à $1^m,09$. L'erreur maximum du point observé moyen serait, d'après ce que nous avons vu sur les erreurs des hauteurs,

$$\frac{\sqrt{(1,09)^2 + (1,09)^2 + 2\,(1,09)^2 \cos 60°}}{\sin 60°} = 2^m,2,$$

c'est-à-dire toujours plus petite que $\frac{2 \times 1.09}{\sin 60°} = 2^m,5$. Donc le point à l'heure moyenne des deux observations est mieux déterminé que le point au moment de la première ou de la deuxième observation, c'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, il vaut mieux, au point de vue des erreurs d'estime dans l'intervalle, observer avant et après le moment où l'on veut le point, que d'observer au moment même et après ou avant. Ainsi le point à midi obtenu par deux observations de soleil à 10 heures 1/2 et à 1 heure 1/2, sera moins influencé par les erreurs d'estime que le même point obtenu par une observation à 9 heures et une autre à midi. Dans la figure 20, la distance A'p représente l'erreur maximum que peut avoir le point estimé A' après avoir parcouru m

milles à partir du point exact A. Admettant que la vitesse ait été estimée à $\frac{1}{n}$ près et la route à r^o près, on a $A'p = \sqrt{\overline{A'a}^2 + \overline{ap}^2}$ ou $A'p = \frac{m}{n}\sqrt{1 + n^2 \sin^2 r}$. Si on suppose que m soit égal à 100 milles, que la vitesse ait été estimée à $\frac{1}{20}$ près et la route à 2° 1/2, on trouve que $A'p$ est égal à $6^m,7$. Ainsi un bâtiment, ayant parcouru 100 milles à partir du dernier point observé, peut avoir $6^m,7$ d'erreur sur son point estimé, en admettant que les erreurs de vitesse et de direction se soient tenues dans les limites données, qui nous semblent celles sur lesquelles on peut généralement compter. (S'il y avait eu plusieurs routes, en prenant pour m la somme des milles parcourus, $A'p$ donnera une limite trop forte de l'erreur du point estimé.)

Du courant. — Pendant l'intervalle des observations le bâtiment est soumis à l'effet du courant; si on en connaît la vitesse et la direction, on corrigera l'estime dans l'intervalle, et le point observé sera obtenu exactement. Quand on ne connaît ni la direction ni la vitesse du courant, on peut lui supposer une vitesse maximum, sa direction étant quelconque, et déterminer quelle est l'erreur maximum qui en découle sur le point observé. Ainsi soit T l'intervalle en heures des observations, v la vitesse maximum supposée du courant, le déplacement maximum dû au courant est vT; la direction, étant quelconque, peut être celle même de la première observation; il s'ensuit, sur cette observation ramenée au moment de la deuxième, une erreur maximum de vT, et sur le point lui-même une erreur de $\frac{vT}{\sin o}$. Au point de vue des erreurs provenant du courant comme de celles provenant de l'estime, il vaut mieux observer de part et d'autre du moment où l'on veut le point. Par belle brise, on doit généralement s'attendre à un courant de surface portant sous le vent.

CALCUL DE LA LIMITE D'ERREUR DU POINT OBSERVÉ.

Premier exemple.— On a observé à 8 heures du matin dans l'Est et à midi dans le Sud; dans l'intervalle le bâtiment a filé 10 nœuds au S. 68° E.; les hauteurs ont été prises à 1', la vitesse estimée à $\frac{1}{20}$, la route à 2° 1/2 ; la vitesse maximum supposée du courant est de $0^m,3$ à l'heure dans une direction inconnue; quelle est la limite d'erreur du point obtenu (laissant de côté, bien entendu, l'erreur qui peut provenir du calcul lui-même)?

L'angle ω de la route avec la première observation est de 22° ; l'angle *o* d'observation est de 90°; l'intervalle T est de 4^h et le chemin parcouru *m* de 40 milles.

En appliquant les formules données plus haut, l'on a :

Erreur sur la 1re observation ramenée à midi,	due à l'estime........	$2^m,50$	$1,85 = \frac{40}{20} \cos 22^\circ$
	au courant $4 \times 0^m,3 =$	$1\ ,20$	$0,65 = 40 \sin 2^\circ 1/2 \sin 22^\circ$
	à la hauteur.........	$1\ ,00$	
	Total............	$4^m,70$	carré 22,09
Erreur de la 2e observation (hauteur)....		$1\ ,00$	— 1,00
Erreur maximum du point $= \sqrt{23,9} =$		$4\ ,8$	Som. 23,09

Ainsi le point de midi peut être erroné de $4^m,8$, et cela aura lieu si la vitesse réelle a été $10^n,5$ au lieu de 10^n ; si la route a été le S.70°30′E. au lieu du S.68°E.; si le courant a porté de $0^m,3$ par heure dans l'Est, enfin si la première hauteur est trop petite de 1′ et la deuxième trop grande ou trop petite de 1′. On ne doit pas s'attendre à avoir $4^m,8$ d'erreur, ce chiffre étant la limite que l'erreur puisse atteindre, pas plus qu'on ne peut s'attendre à avoir une erreur égale à zéro, qui est la limite inférieure; les probabilités sont qu'il y a $2^m,4$ d'erreur sur le point. Comme les observations ont été prises au premier vertical et au méridien, les erreurs maxima des observations $4^m,7$ et 1^m sont les erreurs maxima de la longitude et de la latitude.

Dans l'exemple précédent, nous nous sommes mis dans le cas d'un observateur se trouvant par 36°N. et observant le soleil à son passage au premier vertical et au méridien, la déclinaison du soleil étant de 20°N. Supposons maintenant que dans les mêmes circonstances on ait observé à 11^h et à 1^h, les azimuths correspondants sont S. 43°30′E. et S. 43°30′O.; l'intervalle n'est plus que de 2^h, le chemin de 20 milles ; l'angle ω de 24°30′ et l'angle d'observation de 87°. Le calcul d'approximation donne :

Erreur de la 1re observation ramenée à 1 heure.	Estime..................	$1^m,25$	$0,91 = \frac{20}{20} \cos 24^\circ 1/2$
	Courant $= 2 \times 0,3.... =$	$0\ ,60$	$0,34 = 20 \sin 2^\circ 1/2 \sin 24^\circ 1/2$
	Hauteur.................	$1\ ,00$	
	Total...........	$2^m,85$	carré .... = 8,12
	2e observation hauteur.....	$1\ ,00$	— = 1,00
	Double produit....	$5\ ,70$	$\times \cos 87^\circ = 0,30$
Erreur maximum sur le point à 1 heure $\frac{3,7}{\sin 87^\circ} =$		$3^m,1$	9,42 $\sqrt{\ } = 3,7$

On voit par cet exemple quel avantage il y a à rapprocher les observations : l'erreur maximum n'est plus que de $3^m,1$ au lieu de $4^m,8$; cela tient à ce que l'intervalle n'est que de 2^h au lieu de 4^h, l'angle d'observation restant à peu près aussi favorable. La latitude est moins bien déterminée que dans le cas précédent, mais la longitude l'est beaucoup mieux et le point lui-même est plus exact. $3^m,1$ représente l'erreur maximum sur le point de 11^h ou de 1^h, celle du point de midi ne serait que de $2^m,8$.

Deuxième exemple. — On a observé le soleil à 11^h dans le S. 37°E. et à 11^h40^m dans le S. 13°E. (ce qui correspond à la latitude de 40°N., et à la déclinaison de 20°N.); la vitesse du bâtiment étant de 9 milles au S. 15°O. et estimée à $\frac{1}{20}$ près, la route à 2°5, le courant maximum supposé de $0^m,3$, les hauteurs prises à 1',5 ; quelle est l'erreur maximum du point obtenu ?

On a $\omega = 52°,0 = 24°$, $m = 6$ milles. Le calcul donne :

1re observation ramenée.	Estime....	$0^m,39$	$0,18 = \frac{6}{20} \cos 52°$
	Courant...	$0\ ,20$	$0,21 = 6 \sin 52° \sin 2°,5$
	Hauteur...	$1\ ,50$	
		$2^m,09$	carré.... $= 4,37$
2e observation.....		$1\ ,50$	id. $= 2,25$
Double produit.....		$6^m,27$	$\times \cos 24° = 5,73$
			$12,35\ \sqrt{\ } = 3,5$

$$\text{Erreur maximum} = \frac{3,5}{\sin 24°} = 8^m,6$$

Supposons maintenant que la deuxième observation ait été prise à 1^h au lieu de 11^h40^m, l'intervalle est de 2^h au lieu de 40^m, c'est-à-dire trois fois plus grand, mais les deux azimuths étant S. 37° E., S. 37° O., l'angle d'observation est de 74°. Effectuons le calcul :

1re observation ramenée.	Estime....	$1^m,17$	
	Courant...	$0\ ,60$	
	Hauteur...	$1\ ,50$	
		$3^m,27$	carré.... $= 10,69$
2e observation.......		$1^m,50$	— $= 2,25$
Double produit......		$9\ ,81$	$\times \cos 74° = 2,70$
			$15,64\ \sqrt{\ } = 3,96$

$$\text{Erreur maximum } \frac{3,96}{\sin 74°} = 4^m,1$$

Quoique l'intervalle en temps soit triplé, le fait d'avoir un angle d'observation de 74° au lieu de 24° fait que l'approximation sur laquelle on peut compter est deux fois plus grande. Cet exemple fait voir l'importance des angles d'observation favorables, importance qui va en augmentant avec les erreurs sur les hauteurs.

Règle pour la détermination du point.

De la discussion à laquelle on vient de se livrer sur les erreurs dont peuvent être affectés les divers éléments du point observé, les conclusions pratiques à retenir sont celles-ci :

Eu égard aux erreurs de hauteurs, l'angle d'observation le plus favorable est de 90°.

Eu égard aux erreurs provenant du courant et de l'estime dans l'intervalle, l'angle le plus favorable est encore de 90° et l'intervalle doit être le plus petit possible.

Donc la règle suivante :

Pour la détermination du point à un moment donné, prendre deux observations aussi voisines que possible de ce moment et faisant entre elles un angle se rapprochant de 90° ; estimer la route dans l'intervalle du mieux qu'on pourra. A moins d'impossibilité, l'angle d'observation doit être compris entre 45° et 135°.

Cette règle est générale et indépendante du mode de calcul employé ; voici quelques explications sur son usage.

Si on veut le point le matin, on prendra au petit jour une ou deux observations d'étoiles ou de planète, que l'on combinera avec une observation de soleil prise peu de temps après son lever. Dans la journée, on se servira, s'il est possible, d'observations combinées de soleil et de lune, sinon de deux observations de soleil présentant un écart azimuthal d'au moins 45°. Si c'est le point de midi que l'on désire, on prendra les deux observations de part et d'autre du méridien, entre 30° et 45° d'azimuth; quand la différence entre la latitude et la déclinaison ne sera pas très-considérable, on saura à peu près le moment où il faut observer en transformant cette différence en temps; ainsi, si la déclinaison est de 10°N. et la latitude de 25°N. ou de 5°S., il faut observer vers 15° d'angle horaire de chaque côté du méridien, c'est-à-dire vers 11^h et 1^h; si la déclinaison est 20°N. et la latitude 18° ou 22°N., on observera 2° ou 8^m avant et après midi, il vaut mieux diminuer l'intervalle que l'augmenter. Cette petite règle bien simple sera très-utile dans la pratique.

Déterminer sa position en mer par deux observations de soleil, ou en vue de terre par deux relèvements d'un même point, sont deux opérations qui présentent une grande analogie. On sait que l'on prend deux relèvements AR, AR′ du point, qu'on ramène le premier relèvement au moment du deuxième en e'R, par un transport ee' égal et parallèle à la route suivie, comme on l'a fait pour la droite de la pre-

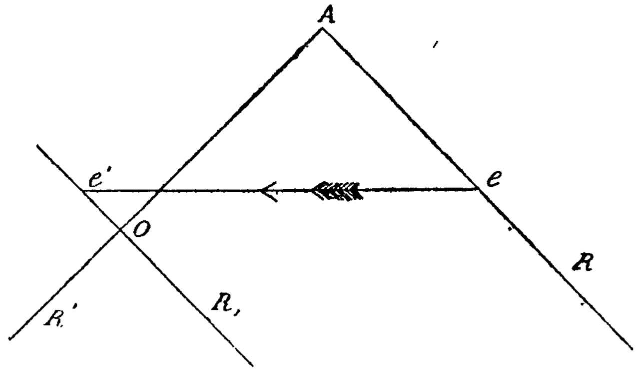


Fig. 21.

mière observation, et qu'on obtient ainsi le point o au moment du deuxième relèvement. Les meilleures conditions pour que le point soit exactement déterminé, consistent à prendre les deux relèvements à 45° de l'avant et de l'arrière du travers. C'est pour une raison semblable que les deux observations, prises à 45° d'azimuth de chaque côté du méridien, sont préférables à deux observations prises dans toute autre direction.

Si on veut avoir le point le soir, on observera le soleil peu de temps avant son coucher et on combinera cette observation avec une ou deux autres d'étoile ou de planète prises au crépuscule.

Il arrive fréquemment que les observations sont possibles la nuit, quand elles ne l'ont pas été pendant la journée ; avec les derniers perfectionnements apportés aux lunettes des instruments, on peut, en temps ordinaire, espérer avoir les hauteurs à 5′ près ; cette approximation donnera généralement un point plus exact que le point estimé, il faudra donc avoir recours aux observations de nuit quand on n'en aura pas eu dans la journée ; on choisira pour cela deux étoiles brillantes dont les verticaux se coupent convenablement du côté où l'horizon est le plus net ; on utilisera la lune, si faire se peut ; si on prend trois observations pour avoir une vérification, ce qui sera prudent, on les choisira à 60° ou 120° environ d'écart azimuthal, de façon que le triangle d'observation se rapproche du triangle équilatéral ; le nombre des observations et la suppression des erreurs d'estime et de courant compenseront en partie l'inconvénient qui résulte des incertitudes de hauteur. Nous ferons remarquer, en passant, qu'il n'est nullement nécessaire que les observations soient strictement simultanées pour qu'on n'ait pas à s'occuper du déplacement du bâtiment dans l'intervalle, et qu'il suffit que ce déplacement soit négligeable; sous ce rapport, même avec les plus grandes vitesses, on n'en est pas à quelques secondes près. Nous faisons cette remarque, parce que nous voyons dans tous les cours de navigation, au titre : « Point par deux hauteurs simultanées d'étoile », donner, comme règle, d'observer la première étoile, puis la deuxième, puis de revenir à la première, de façon à ramener, par une partie proportionnelle, la hauteur de la première étoile au moment de la deuxième. Il y a là une double peine d'observation et de calcul complétement inutile. Si le déplacement du bâtiment entre les deux observations est négligeable, on le néglige; s'il ne l'est pas, on en tient compte dans le calcul, ce qui est beaucoup plus simple que la double observation de la même étoile avec parties proportionnelles.

Il faut avoir soin, dans les observations de nuit, de relever au compas les étoiles observées ; ce relèvement servira de contrôle au calcul et donnera en outre le moyen de reconnaître l'étoile observée, si on a quelques doutes; avec l'azimuth donné par le compas, la latitude estimée et la hauteur, le triangle de position résolu grossièrement donnera d'une manière approchée la distance polaire et l'angle horaire, dont on conclura l'ascension droite; ces deux éléments permettront de voir dans la *Connaissance des temps* quelle est l'étoile observée.

Comme règle générale, toutes les fois qu'il y aura intérêt à connaître sa position bien exactement, il ne faudra pas se contenter de deux observations, mais en prendre trois; elles se contrôleront mutuellement, et l'exactitude obtenue sera plus grande. Ainsi pour midi, en outre des deux observations de part et d'autre du méridien, on prendra la hauteur méridienne, et on agira comme nous l'avons fait pour le cas de trois observations, en supposant des erreurs égales et le plus petites possible sur les trois hauteurs. Si on croit que le désaccord des trois observations provient du courant ou de l'estime, on prendra pour midi la latitude méridienne et la longitude donnée par les deux autres observations.

Pour éviter les erreurs d'estime dans l'intervalle, il faudra noter avec soin l'heure de la montre d'habitacle aux moments des observations; une erreur de 5^m sur cette heure représenterait, à une vitesse de 12 nœuds, une erreur sur le déplacement du bâtiment de 1 mille, ce qui revient à une erreur de 1' sur une des hauteurs; les heures des changements de route ou de vitesse seront aussi notés avec soin, et autant que possible ces changements auront lieu à des fractions rondes de l'heure, telle que l'heure, la demie, le quart, etc. Il est un usage qui prévaut encore à bord de bien des bâtiments, celui de régler la montre de bord à midi sur la hauteur méridienne; cet usage a le double inconvénient, d'abord de mal régler la montre, qui le serait beaucoup mieux avec les chronomètres et la longitude, ensuite d'occasionner un changement dans la montre pendant les observations, ce qui peut être une nouvelle cause d'erreurs; il est préférable de régler la montre le matin à $5^h 1/2$, par exemple, et de faire toujours supporter au loch, de 5^h à 6^h, le changement qui découle de l'avance ou du retard donné à la montre. Nous ferons aussi une remarque sur les heures du loch; on le jette au milieu et à la fin de l'heure et on prend la moyenne pour le chemin fait pendant l'heure; il vaut évidemment mieux le jeter au 1/4 et aux 3/4, à $10^h 1/4$ et $10^h 3/4$, par exemple, et prendre la moyenne pour le chemin de 10^h à 11^h. Nous avons cru devoir faire ces recommandations, parce qu'il nous a semblé que généralement on ne donnait pas assez de soins au calcul d'estime dans l'intervalle pour en apporter souvent beaucoup trop à d'autres parties du calcul : tel qui, dans les heures, pousse jusqu'au centième de seconde et dans les hauteurs ou leurs corrections jusqu'à la seconde, ne prend les heures à la montre du bord qu'au quart d'heure près, et commet ainsi des erreurs de 1', 2', 3', selon la vitesse.

Pour l'observation, on pourra se contenter d'un contact, mais en ayant soin de contrôler la personne qui écrit l'heure et en lisant soi-même avec attention sur l'instrument; si l'horizon ou les bords du soleil sont douteux, on prendra trois contacts et on fera la moyenne des heures et des hauteurs; il est clair que l'on n'agit ainsi qu'approximativement, car c'est au premier vertical seulement que les hauteurs varient proportionnellement au temps, mais cette approximation est suffisante, à moins d'écarts considérables entre les heures; au lieu de prendre un grand nombre de contacts pour une même observation, ainsi qu'il est recommandé, il est préférable de prendre une observation de plus à un autre moment.

Pour le calcul, on commencera par celui des coordonnées terrestres de l'astre; les compteurs vont généralement assez bien pour que la comparaison après soit suffisante ; les heures seront prises à la demi-seconde, les hauteurs, latitude, corrections, etc., au dixième de minute, les azimuths au dixième de degré, les logarithmes à cinq décimales.

Nous allons donner un exemple de calcul complet par la méthode des hauteurs estimées, en suivant les indications ci-dessus, en nous mettant dans les circonstances où l'on se trouve à la mer et en y joignant le calcul du point estimé.

Données.

	HEURES.	ASTRES.	COMPTEUR.	HAUTEURS.	RELÈVEMENTS.
Carnet d'observations.	Point du 14, 6 heures du soir, L 38 08' N, G 18°22',8 O.				
			15 janvier.		
	6h30 M	Jupiter. . . .	3h22m18s	44°07'00"	»
	Comparaison.	Montre	0 13 15,5	Erreur inst.	— 2'30"
		Compteur. . .	3 21 00,0	Élév. de l'œil.	6m,60
			8 49 15,5		
	8h25 M	☉	5h17m00s	13°56'30"	S 31° E
	Comparaison.	Montre. . . .	2 09 17	Même erreur.	
		Compteur. . .	5 20 00	Même élévation.	
		M-C	8 49 17		
Registre du chronomètre.	Le 14 janvier, à 0 heure TMP. État de la montre : 7h47m56s,5; marche + 8s,26.				
Extrait du Journal.	6h M	S 40° O	151m,1	Depuis 6h du soir le 14.	
	7h »	Id.	12 ,8	Von 20° NO.	
	8h »	S 45° O	12 ,2	Dérive O.	
	9h »	Id.	12 ,0		

NOTA. — Il est bon d'adopter comme règle de retrancher toujours l'heure de la montre de celle de Paris, pour avoir les états, et, dans les comparaisons, de retrancher l'heure du compteur de celle de la montre ; la marche reçoit le signe + ou — selon qu'elle fait augmenter ou diminuer l'état.

Calculer le point au moment de la deuxième observation et la variation.

	LONGUEURS TERRESTRES.	HAUTEURS, DÉCLINAISON.	LATITUDES.	LONGITUDES.	AZIMUTHS, ROUTES.	HAUTEURS ESTIMÉES, MILLES.
15 janvier.	Le 14 6 heures du soir.	Point observé.......	38°08',0 N	18°22',8 O		
6^{h}30 M		Jusqu'à 6^{h}30 matin...	2°28',0 S	53^m,8 = 1°07',2 O	S 20° O	157^m,5
Jupiter.	C 3^{h}22^{m}18^s	44°07'00"	e 35°40',0 N	19°30',0 O	α 2"17	43°59',7
M	C 8 49 15,5	− 2'30"	a 10°20',3 S	25°43',5 O	P^2 6 20	
P	M 7 47 56,5	− 4'33"	46°00',3 S	6°13',5 O	434	
				= 24^m,9	1302	
					1345"	22',4
Le 14	P$_a$ 19^{h}59^{m}30^s	− 1'00"				43°37',3 H$_e$
						43°59',0 H$_o$
	Marche + 7	H$_o$ 43°59'0"	21'5 S	3^m,2 = 4',0 O	Z S 8°,4 O	+21^m,7
T. sid.	+ 19^{h}34^{m}09^s		35°18',5 N	19°34',0 O =	Point rectifié de 6^{h}30	
	+ 3 17					
	15^{h}37^{m}03^s		6',0 S	2^m,2	S 20° O	6^m,4
Æ	− 13 54 12,5	D 10°20'30" A		7^m,3	S 25° O	17^m,2 { 12^m,2
	+ 3,5	− 18"	15',6 S	9^m,5 = 11',6 O	Id.	5^m,0
	G$_a$ 1^{h}42^{m}54^s O	10°20'18" A	e' 34°56',9 N	19°45',6 O =	Point rectifié de 8^{h}25	
8^{h}25 M						
Soleil.	C 5 17 00	13°56'5	a' 21°09',9 S	33°49',1 E	$\bar{1}$.58790	$\bar{1}$.55757
M	C 8 49 17	− 2,5		53°34',7 E	0.22641	
P	M 7 47 56,5	+ 8,2	33°06',5 S		$\bar{1}$.81431	0.26264
Le 14	P$_a$ 21^{h}54^{m}13^s,5	H'$_o$, 14°02'2"	68°03',4 S		0.3949	$\bar{1}$.57251
	Marche + 7,5				$\bar{1}$.4064	$\bar{1}$.39272
	Eq. − 9^{m}39^s,0	21°09'00" A			$\bar{1}$.8013	14°18',0 H'$_e$
	+ 1,5	+ 54"				14°02',2 H'$_o$
	G$_a$ 21^{h}44^{m}43^s,5 O	21°09'54" A			Z' S 50°,7 E } 30°,9	− 15^m,8
	= 2 15 16,5 E		2',7 N	18^{m}2	V S 81°,6 E	− 18^m,4
			6',3 S	3^{m}0	Z S 25° O jusqu'à 9^h	7^m,0
				21^m,2 = 25',8 O	Relèv. S 31° E	V = 19°,7 N O
	Le 15 9^h M	Point observé	34°53',3 N	20°11',4 O	Approx. $= \frac{(18',4)^2}{46} + 0,5 = 0^m,1$	

La première observation a été calculée comme circumméridienne et son azimuth obtenu directement par la formule

$$Z = \frac{P \cos D}{\cos H} = \frac{6°2 \cos 10°}{\cos 44°} = 8°4.$$

La deuxième observation rentre dans le cas général. L'approximation du calcul est de 1/10 de mille, le point obtenu est en effet rigoureux.

Le calcul est complet et comporte tous les chiffres qu'on a dû écrire; on est parti du point observé de 6^h du soir la veille et on a déterminé le point de 9^h du matin; il est clair qu'une erreur sur l'estime de 6^h du soir à la première observation ne changerait pas le résultat.

Nous ne croyons pas qu'aucune méthode conduise aussi rapidement à un résultat aussi exact que celui qui a été obtenu.

Les données et le calcul ont été établis sur un type que l'on pourra adopter comme modèle pour le carnet de données et le cahier de calcul; on gagnera du temps à mettre toujours le même ordre dans les opérations et on risquera moins de se tromper.

DES ERREURS SUR L'ÉTAT DE LA MONTRE.

Dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, on a supposé que la montre était bien réglée et que, par suite, les coordonnées terrestres des astres étaient exactes; si l'état de la montre est erroné, les heures moyennes de Paris le sont également, il s'ensuit sur les déclinaisons, sur le temps sidéral et les ascensions droites, des erreurs; on peut s'assurer que ces erreurs sont négligeables si l'état de la montre est exact à 5 minutes de temps près; par suite, les latitudes terrestres peuvent être regardées comme bonnes, les longitudes terrestres ne sont plus erronées que de l'erreur même de la montre; il en sera de même, évidemment, pour les résultats obtenus au moyen de cette montre, les latitudes seront exactes et les longitudes seront erronées de l'erreur même de l'état et dans le même sens; un état trop fort de 1^m donnera une longitude trop ouest de 15′. Ce qui vient d'être dit ne s'applique pas à la lune, dont les éléments varient très-rapidement; aussi, en cas d'état absolu douteux, on fera aussi bien de prendre d'autres observations que celle de cet astre.

NOTE SUR LA MÉRIDIENNE ET LES CIRCUMMÉRIDIENNES.

Quand on ne possède pas de montre, l'observation de la hauteur méridienne est indispensable pour déterminer le seul élément du point que l'on puisse avoir, la latitude ; mais avec une montre, il n'en est plus de même, et le seul avantage de cette observation consiste alors dans la simplicité du calcul; il est vrai de dire qu'elle présente l'inconvénient de demander plus de temps et d'être plus difficile; au lieu de prendre trois contacts au plus comme dans une observation ordinaire, ce qui est l'affaire d'une ou deux minutes, on prend quinze, vingt contacts pour s'assurer que l'on a bien la hauteur maximum, et on reste dix minutes, un quart d'heure en observation, ce qui fait que tout compris elle exige presque autant de temps; quand l'astre passe loin du zénith, on a la hauteur exactement, mais il faut rester assez longtemps après le passage pour s'apercevoir que la hauteur diminue; si, au contraire, l'astre passe près du zénith, son mouvement étant très-rapide, on risque fort de manquer la hauteur méridienne si on n'a pas constamment l'œil à la lunette; on est, en outre, à la discrétion d'un nuage qui peut venir cacher l'astre au moment du passage; avec l'usage qui existe maintenant de la méridienne ou des circumméridiennes, quand ces observations viennent à manquer, beaucoup de personnes sont embarrassées pour la détermination du point, parce qu'elles n'ont pas l'habitude du calcul général par deux observations. Un autre inconvénient de la hauteur méridienne telle qu'elle est prise, est de ne pas correspondre toujours au passage de l'astre au méridien, ce qui peut occasionner des erreurs sensibles, comme il est facile de s'en rendre compte. On sait qu'on observe, non pas au moment du passage, mais au moment de la plus grande hauteur, c'est-à-dire au moment de la plus petite distance zénithale, autrement dit quand l'observateur et la projection terrestre de l'astre sont le plus rapprochés; or, ces deux points sont animés d'un certain mouvement, et ce n'est que dans des circonstances particulières que la plus petite distance a lieu quand ils sont tous deux sur un même méridien. Sans chercher à résoudre le problème général de la plus courte distance de deux points mobiles sur la sphère, ce problème peut être résolu approximativement dans le cas qui nous occupe.

Négligeons le mouvement en longitude de l'observateur et celui en ascension droite de l'astre, qui sont toujours très-petits par rapport au mouvement horaire de l'astre, et ne considérons que ce dernier mouvement ainsi que ceux en déclinaison et en latitude de l'astre et de l'observateur.

Soient d et l les changements en déclinaison et en latitude pendant une minute, positifs quand ils ont lieu dans le sens de l'observation, c'est-à-dire dans le Sud si on a observé au Sud, et négatifs dans le cas contraire ; soit N_v la distance vraie au moment du passage, α la variation de cette distance, provenant du mouvement horaire, pendant la minute qui suit ou précède ; N_o la plus petite distance et P en minutes son angle horaire.

La projection ayant même mouvement que l'astre en longitude et en latitude, la distance pendant P minutes a augmenté (très-approximativement parce que P est toujours petit) de αP^2 par suite du mouvement horaire et de $d \times P$ par suite du mouvement en déclinaison ; pendant le même temps elle a diminué de $l \times P$ par suite du mouvement en latitude de l'observateur; donc $N_o = N_v + \alpha P^2 + d \times P - l \times P$; N_o étant supposé la plus petite distance, on doit avoir $\frac{dN_o}{dP} = o$; d'où $2\alpha P + d - l = o$ ou $P = \frac{l - d}{2\alpha}$ et en remplaçant $N_v - N_o = \frac{(l - d)^2}{4\alpha} = \alpha P^2 =$ erreur commise $=$ E.

Si l et d sont égaux et de même sens, $P = o E = o$; si $l - d$ est négatif, P est négatif et la plus courte distance a lieu avant le passage ; E est naturellement toujours positif. Voyons quelle limite peut atteindre l'erreur E.

1° Étant par 63° sud et filant 13 nœuds au Sud, on a pris la hauteur méridienne du soleil le 21 mars. L'observation a été faite au Nord ; le mouvement en latitude de l'observateur par minute est de 13'' sud, d'où $l = -13''$; le changement en déclinaison du soleil est de 1'' au Nord, d'où $d = +1''$; les tables donnent $\alpha = 1''$ pour $D = o$, $L = 63°$, d'où en remplaçant $P = \frac{-13 - 1}{2} = -7$ minutes, et $E = 49°$. Ainsi dans le cas où l'on s'est mis, la hauteur a été prise 7 minutes avant midi et diffère de 49 secondes avec la hauteur exacte au moment du passage.

2° Étant par 60° nord et filant 13 nœuds au S. 23° O., on a observé, le 30 avril 1875, la hauteur méridienne de la lune. L'observation a été faite au Sud ; 13 milles au S. 23° O. donnent 12 milles au Sud, d'où $l = +12''$; le 30 avril, au moment du passage, la déclinaison de la lune est environ 10° sud et son mouvement de 15''7 à la minute vers le Nord, d'où $D = -15''7$; les tables donnent $\alpha = 1''03$ pour $L = 60°$, $D = -10°$; d'où en remplaçant $P = \dfrac{12 + 15.7}{2{,}06} = 13^{m},4$; $E = 185'' = 3'05''$.

Ainsi la hauteur a été prise 13'4'' après le passage au méridien et diffère de 3'5'' avec ce qu'elle était au moment du passage. Ces exemples font voir qu'il y aura lieu, dans certaine circonstance, de tenir compte de cette correction.

On évitera tous les inconvénients qui viennent d'être signalés en faisant rentrer les observations voisines du méridien dans le cas général des observations, c'est-à-dire en notant les heures correspondantes à la montre ; si on tient à la simplicité du calcul, avec la longitude estimée on calculera l'heure que doit marquer la montre au moment du passage et on observera à cette heure de la montre ; l'observation aura lieu alors, non pas au méridien vrai, mais quand l'astre passe au méridien estimé ; le cercle d'observation n'est plus un parallèle de latitude, mais un cercle ayant pour pôle la projection terrestre de l'astre ; en un mot, cette observation rentrera dans le cas général des observations telles qu'elles ont été définies.

Des circumméridiennes. — Il nous semble que les circumméri-

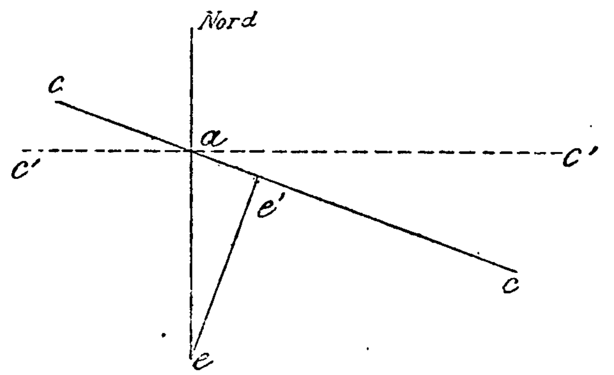


Fig. 22.

diennes sont fréquemment employées à la mer d'une manière peu judicieuse. Quand on n'a qu'une de ces observations, avec l'heure approchée, obtenue au moyen de la longitude estimée, on calcule une latitude que l'on considère comme le résultat de l'observation. D'abord le résultat de l'observation n'est pas une latitude, c'est-à-dire une ligne courant Est et Ouest, mais bien une ligne perpendiculaire à l'azimuth de l'astre et pouvant être inclinée dans certains cas de 15° sur le parallèle, ensuite la latitude que l'on adopte n'est même pas la plus probable; une figure fera comprendre ce que nous voulons dire. Soit e le point estimé, et cc la droite de l'observation circumméridienne; ce que l'on fait ordinairement revient à adopter comme résultat de l'observation le parallèle $c'c'$, ce qui n'est pas exact; ensuite il est évident que la latitude la plus probable n'est pas celle du point a, mais celle du point e', pied de la perpendiculaire abaissée du point estimé e. On commet une erreur tout à fait semblable quand on admet que le résultat d'une observation prise en dehors du premier vertical est une longitude.

Quand, avec la hauteur circumméridienne on a eu une autre observation dite horaire, avec cette dernière et la latitude estimée on calcule l'heure ou la longitude, qui sert ensuite à calculer la latitude au moyen de la circumméridienne. Le point ainsi obtenu est exact si l'observation horaire a été prise au premier vertical, mais il n'en est pas de même dans le cas contraire; il faut alors, avec la latitude trouvée, corriger la longitude, puis avec celle-ci corriger la latitude, et ainsi de suite

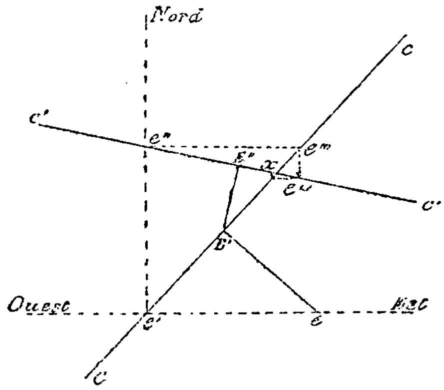


Fig. 23.

jusqu'à ce qu'on trouve deux résultats consécutifs suffisamment rapprochés ; une figure fera voir la suite des opérations que l'on a à faire.

Soient *cc*, *c'c'* les droites de l'observation horaire et de l'observation circumméridienne, et *e* le point estimé; le premier calcul de longitude fait avec la latitude estimée déterminera le point *e'*, le calcul de la latitude par la circumméridienne donnera ensuite le point *e''*, puis on calculera les points *e'''*, e^{iv}, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne deux points suffisamment rapprochés. Cette méthode est, si nous ne nous trompons, la méthode d'approximation successive de Borda; on sait que par la méthode des hauteurs estimées on aurait à calculer le point E', puis le point E'' et le point de rencontre des droites E'*x*, E''*x*; il est facile de voir que cette dernière méthode est de beaucoup la plus expéditive, elle fait aussi éviter l'erreur signalée plus haut pour le cas d'une seule observation circumméridienne...

Nous comptions compléter ce que nous avons dit dans une note précédente sur les constructions graphiques, leur utilité pratique dans la navigation, tant au point de vue de la détermination du point et de la route que de celle des courants, mais nous sommes forcé d'interrompre ce travail, que nous allons résumer en quelques lignes.

Résumé. — La première partie de cette note est un exposé du problème de la détermination du point par les observations; cet exposé diffère de l'exposé ordinaire en ce sens qu'au lieu de chercher les coordonnées du point, on cherche le point lui-même. Tout ce que comportent les traités usuels de navigation est exact tant qu'il s'agit de déterminer l'heure ou la longitude d'une part, la latitude de l'autre; mais bien des conclusions auxquelles on arrive en considérant le problème sous ce point de vue ne le sont plus quand il s'agit de déterminer le point; or, dans la pratique, c'est le point qu'il faut et non la latitude et la longitude, qui ne servent qu'à le représenter.

La deuxième partie comprend la méthode de calcul de fausse position, que nous avons appelée méthode des hauteurs estimées; son grand avantage, à nos yeux, consiste dans sa généralité, elle s'applique à tous les cas. Les formules employées pour le calcul de la distance et de la route d'un point à un autre sont toujours les mêmes; deux cas seuls, en apportant des simplifications, amènent aussi des changements dans les formules : celui d'une observation circumméridienne (quand l'azimuth Z est petit) et celui d'une observation circumzénithale (quand la distance N est petite). On a ajouté un moyen simple de déterminer l'approximation donnée par le calcul de fausse position et de voir ainsi s'il y a lieu d'obtenir une deuxième approximation; nous répé-

tons que cela ne sera nécessaire que dans le cas d'un angle d'observation très-défavorable ou d'observations circumzénithales.

La troisième partie contient la discussion des erreurs sur les différents éléments du point et de leur influence, non pas sur la latitude ou sur la longitude, mais sur le point lui-même; on en a conclu les règles pratiques que l'on doit suivre à la mer.

On remarquera qu'on n'a pas eu recours à l'analyse, mais bien aux démonstrations géométriques que les calculs ont suivies pas à pas pour ainsi dire; on ne risque pas ainsi de s'égarer, comme cela a lieu fréquemment, au milieu de formules compliquées dont le sens finit par échapper, on reste toujours en présence de la question, les démonstrations frappent mieux l'esprit et les conclusions sont plus claires et plus faciles à déduire.

On trouvera sans doute que la dernière partie renferme des détails bien minutieux; il est clair que la plupart des recommandations qu'elle contient ne s'appliquent pas à un bâtiment en pleine mer pour lequel le point, tous les deux ou trois jours, serait à la rigueur suffisant, mais elles auront leur utilité aux atterrissages, pour tous les bâtiments, et surtout pour ceux qui, comme les paquebots, ayant pour mission de marcher vite et d'arriver quand même, ont grand intérêt à connaître toujours exactement leur position. Les considérations qui ont été émises seront aussi très-utiles pour les travaux hydrographiques, tels que sondages en mer, recherche des roches ou bancs douteux, détermination des courants, etc., ainsi que pour la pose des câbles électriques; dans ces circonstances, il est nécessaire de connaître à tout instant, pour ainsi dire, la position du bâtiment.

Certes, de grandes facilités ont été données à la navigation par les perfectionnements apportés aux montres, aux instruments, aux cartes, par les nombreux phares ou balises dont presque toutes les côtes sont jalonnées; mais il faut se rendre compte, d'un autre côté, que les conditions de la navigation ont bien changé depuis quelques années, les bâtiments filent aujourd'hui jusqu'à quinze nœuds; de pareilles vitesses, si l'on veut en profiter, exigent de plus grandes précautions et souvent la rectification du point deux fois par jour, le matin et le soir, sera nécessaire. Un bâtiment qui franchit plus de cent lieues dans les vingt-quatre heures doit presque se considérer comme étant toujours en atterrissage; le point qu'il détermine à trois ou quatre cents lieues des côtes sera peut-être celui sur lequel il devra atterrir.

Les déviations des compas à bord des nouveaux bâtiments sont souvent douteuses, malgré le soin qu'on apporte à les déterminer; l'incertitude qui en résulte sur la route suivie, combinée avec les nouvelles vitesses, est aussi une raison fort importante d'apporter plus de soin dans la détermination du point.

En temps de paix, la mission d'un navire de guerre est rarement assez pressée pour qu'un retard ait une grande importance ; en temps de guerre, au contraire, il faut arriver et arriver vite, et cependant on peut avoir à agir sur des côtes dont les phares ont été éteints, les balises enlevées, ces côtes peuvent être basses, etc., il n'est pas douteux que dans des circonstances pareilles, le capitaine qui voudra utiliser toute sa vitesse et ne pas être arrêté dans sa mission par la brume, la nuit, etc., devra employer tous les moyens de connaître fréquemment et exactement la position de son bâtiment.

Quel est l'officier qui, après quelque temps de navigation, ne s'est pas trouvé dans une de ces positions difficiles où chacun se demande : où sommes-nous ? Nous espérons que le travail que nous présentons aujourd'hui à nos camarades pourra faciliter, dans bien des cas, la réponse à cette question quelquefois si grave.

A bord de la *Renommée,* février 1875.

MARCQ SAINT-HILAIRE,
Capitaine de frégate.