La phase arabe de l'histoire de la trigonométrie

A. DJEBBAR
Université de Lille 1 – CNRS (U. M. R. 8524)

Introduction

Avant d'aborder le contenu de la trigonométrie arabe [1], il me semble nécessaire de faire quelques remarques sur sa place et sur son statut parmi les autres pratiques scientifiques qui ont commencé en pays d'Islam vers la fin du VIII^e^ siècle et qui se sont poursuivies jusqu'au XVII^e^ siècle, à des rythmes différents et avec des intensités variables [2].

En premier lieu, et pour situer la trigonométrie dans l'ensemble de ces pratiques, il faut préciser que ces dernières étaient divisées en *savoirs savants* et en *savoirs traditionnels*. On entend par savoir traditionnel, tout ce qui existait avant le phénomène des traductions et qui était enseigné ou transmis dans le cadre des activités professionnelles de l'époque. En médecine, par exemple, il s'agit de l'ensemble des observations, des thérapies, des médicaments, des conseils d'hygiène, des plantes, etc., que l'on a patiemment rassemblés. En astronomie, ce sont tous les résultats de l'observation locale du ciel qui concernent non seulement le mouvement des étoiles et des planètes visibles à l'œil nu mais également tous les phénomènes météorologiques. En mathématique, il s'agit des méthodes des arpenteurs, des procédures du calcul mental et digital utilisées par les marchands et des opérations sur les fractions, très courantes dans les répartitions des héritages et dans les opérations de change. Quant au savoir savant, il englobe toutes les connaissances qui ont été transmises aux Arabes par l'intermédiaire des traductions [3].

La trigonométrie fait partie de ce second savoir puisque ses premiers éléments ont été puisés, exclusivement, dans des textes traduits en arabe à partir du VIII^e^ siècle. Ces textes appartiennent à deux traditions, celle de la Grèce et celle de l'Inde, même si certains d'entre eux sont peut-être parvenus aux premiers astronomes du VIII^e^ siècle dans des traductions ou dans des rédactions persanes et syriaques.

En second lieu, nous sommes en présence d'un chapitre mathématique qui, en tant que discipline autonome, est totalement absent des classifications arabes des sciences. En effet, dans les encyclopédies, la trigonométrie n'est jamais dégagée des disciplines qui l'utilisent, comme nous pouvons le voir, à titre d'exemple, dans l'ouvrage de l'encyclopédiste et mathématicien Ibn al-Akfānī (m. 1348) où sont présentées, comme parties de l'astronomie, quatre "sciences" qui sont des domaines d'application de la trigonométrie et qui traitent des tables astronomiques, du temps, de la projection de la sphère et des gnomons [4]. À cela il faut ajouter le vaste domaine des instruments astronomiques qui utilisent certaines lignes trigonométriques pour effectuer des mesures ou pour réaliser des calculs. C'est en effet dans l'astronomie théorique et appliquée, et en partant d'un héritage ancien, que vont être élaborés les objets et les outils nouveaux qui vont

1. Par convention, le qualificatif "arabe" renvoie, dans cet article, à la production scientifique en langue arabe, indépendamment de l'origine linguistique, ethnique ou confessionnelle des auteurs évoqués.

2. Pour un panorama des activités scientifiques en pays d'Islam, en relation avec leur environnement, voir A. DJEBBAR : *Une histoire de la science arabe*, Paris, Seuil, 2001.

3. A. DJEBBAR : *Pratiques savantes et savoirs traditionnels en pays d'Islam : l'exemple des sciences exactes*, Actes du Colloque International sur "*Science and Tradition : Roots and wings for Development*", (Académie Royale des Sciences d'Outre Mer & UNESCO, Bruxelles, 5-6 avril 2001), Bruxelles, 2002, pp. 62-86.

4. Ibn al-Akfānī : *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid* [Guide de celui qui vise les plus nobles buts], M. Fākhūrī, M. Kamāl & H. aṣ-Ṣaddīq (édit.), Beyrouth, Maktabat Lubnān Nāshirūn, 1998, pp. 81-82.

constituer la future discipline. C'est également l'astronomie qui restera, pendant des siècles, son domaine d'application privilégié, à travers deux axes principaux : la géométrie sphérique et les techniques de calcul (interpolation, approximation, procédés arithmétiques et algébriques). Malgré cette forte présence des pratiques trigonométriques, de la fin du VIII^{e} siècle jusqu'au milieu du XI^{e}, les scientifiques ne leur ont pas donné de nom (comme ils l'ont fait pour l'algèbre). Ils se sont contentés de parler du triangle et des éléments du triangle. Il faudra attendre les manuels mathématiques et les dictionnaires modernes pour y trouver un nom : ^{c}*Ilm ḥisāb al-muthallathāt* [Science du calcul des triangles].

En troisième lieu, il faudrait évoquer les facteurs extérieurs qui ont favorisé, directement ou indirectement, le développement de la trigonométrie. Il y a eu d'abord les nouvelles pratiques religieuses qui avaient des besoins précis. Pendant plus d'un siècle, les réponses à ces demandes ne pouvaient pas être données par les activités scientifiques naissantes. On s'est alors contenté d'utiliser l'observation. Mais le caractère approximatif des résultats obtenus va favoriser les initiatives visant à élaborer, pour ces problèmes, des solutions plus scientifiques.

Il y a eu également les besoins de l'astrologie qui, dans ses aspects « théoriques », ne se différenciaient pas de ceux de l'astronomie dans la mesure où elle en était un des domaines d'application privilégiés. On sait par exemple que l'un des sujets les plus importants étudiés dans le cadre de l'astronomie arabe a été celui du mouvement des planètes. Comme certaines prédictions astrologiques utilisaient les conjonctions de certaines de ces planètes, on voit bien que tout progrès dans ce domaine, en particulier au niveau de la précision des calculs, intéressait les astrologues.

Il y a eu enfin les commandes de l'État qui ne correspondaient pas à des besoins spécifiques mais dont les résultats concernaient les autres domaines. Parmi les sujets qui ont été régulièrement étudiés (et qui ont nécessité la mobilisation de véritables équipes d'astronomes), on peut citer le calcul d'un degré de méridien, la vérification de l'obliquité de l'écliptique, la détermination des latitudes et des longitudes terrestres en vue d'élaborer des cartes.

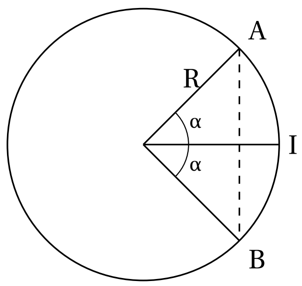
1 Les premiers pas de la trigonométrie arabe

Comme la trigonométrie arabe a puisé, essentiellement, dans les écrits indiens et grecs, il est utile de rappeler le contenu de ces deux héritages. Dans la tradition grecque, on peut rassembler sous le nom de « *trigonométrie* » tous les éléments qui permettaient de mesurer les éléments d'un triangle (côtés, angles, hauteurs, médianes, médiatrices, etc.). Mais dans les faits, ce sont les côtés et les angles qui interviennent le plus souvent dans les calculs. Au départ, il s'agissait d'éléments du triangle plan puis, pour les besoins de l'astronomie, cela s'est étendu à l'étude des éléments du triangle sphérique. L'outil qui était à la base de cette trigonométrie est la corde de l'angle double qui correspond au double du sinus de l'angle en question.

Corde de l'angle double et sinus

Si R est le rayon du cercle et crd(a) la corde de l'angle a :

$$AB = \mathrm{crd}(2a)$$
$$AI = \frac{1}{2}\mathrm{crd}(2a) = R\sin(a)$$



L'héritage trigonométrique grec qui est parvenu aux premiers astronomes arabes est le résultat d'une longue pratique qui aurait commencé avec les travaux d'Hipparque. Il serait le premier à avoir utilisé la notion de « corde de l'angle double ». C'est cette notion qui a été utilisée par les géomètres et les astronomes de cette tradition, en particulier par Ménélaüs, dans ses *Sphériques*, lorsqu'il a voulu établir la fameuse *formule* *du quadrilatère complet*[5]. Ce théorème sera d'ailleurs, et pendant des siècles, l'outil par excellence pour la résolution des problèmes liés au triangle sphérique[6]. Il suffisait d'insérer la grandeur cherchée dans un quadrilatère adéquat dont les côtés sont des arcs de grands cercles de la sphère puis d'utiliser la formule en question pour obtenir la valeur de l'élément inconnu à partir de cinq grandeurs connues, données par le problème étudié.

Formule de la figure sécante

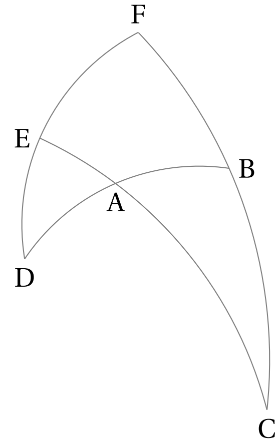
Si CE, CF, DF, DB sont des arcs de grands cercles d'une sphère, on a :

- Formulation à l'aide des cordes de l'angle double :

$$\frac{\mathrm{crd}(2CB)}{\mathrm{crd}(2BF)} = \frac{\mathrm{crd}(2CA)}{\mathrm{crd}(2AE)} \times \frac{\mathrm{crd}(2ED)}{\mathrm{crd}(2DF)}$$

- Formulation à l'aide des sinus :

$$\frac{\sin(CB)}{\sin(BF)} = \frac{\sin(CA)}{\sin(AE)} \times \frac{\sin(ED)}{\sin(DF)}$$



Dans son *Almageste*, PTOLÉMÉE a, de nouveau, exposé ce théorème (dans ses deux versions, plane et sphérique) en lui ajoutant quelques relations entre les cordes qui, interprétées en termes modernes, sont équivalentes à certaines formules trigonométriques classiques[7]. C'est dans cet ouvrage que les astronomes arabes ont trouvé les premiers domaines d'application du théorème du quadrilatère complet[8].

Formule de PTOLÉMÉE

$$\mathrm{crd}(a-b).\mathrm{crd}(180°) = \mathrm{crd}(a).\mathrm{crd}(180° - b) - \mathrm{crd}(b).\mathrm{crd}(180° - a)$$

$$\mathrm{crd}^2(a) + \mathrm{crd}^2(180° - b) = \mathrm{crd}^2(180°)$$

C'est également dans cet important traité que les premiers astronomes arabes se sont familiarisés avec les outils trigonométriques et les résultats géométriques utilisés par les astronomes grecs. Mais, c'est dans les *Sphériques* de MÉNÉLAÜS que ces outils et ces résultats sont exposés et leur validité justifiée.

La seconde tradition trigonométrique évoquée explicitement par les scientifiques arabes est celle de l'Inde. Avant d'en parler, il faut préciser que l'apport indien à l'astronomie arabe ne se limite pas, comme on l'a dit parfois, aux seuls éléments trigonométriques. Les premiers astronomes musulmans de la fin du VIII^e^ siècle et du début du IX^e^ leur ont emprunté la notion d'azimut ainsi que la relation entre la mesure du temps et la hauteur d'un astre de déclinaison donnée. Ils les ont également suivis dans leur calcul des coordonnées écliptiques qui s'est avéré plus précis que celui des Grecs. Ils ont enfin supprimé certaines approximations faites par ces derniers et ont affiné leurs techniques de calcul.

5. TH. HEATH : *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover publications, Inc., 1981, vol. II, pp. 265-273
6. L'astronomie sphérique grecque se ramène, essentiellement, à une application répétée du théorème de Ménélaüs.
7. C. PTOLÉMÉE : L'*almageste*, M. Halma (trad.), Paris, 1813, vol. 1, pp. 26-37, 50-55. La construction de la table des cordes, dans le chapitre 10 de cet ouvrage, est réalisée à l'aide d'une formule correspondant à celle de l'addition des arcs.
8. L'*almageste* a été le livre de chevet des astronomes arabes. Ce qui explique pourquoi il a bénéficié de nombreuses traductions et révisions entre la fin du VIII^e^ siècle et le début du X^e^. Ces traductions successives étaient justifiées par la découverte, à chaque fois, de nouvelles copies du traité. Elle répondait également à un souci de précision et de rigueur de la part des utilisateurs arabes.

En trigonométrie, ils ont emprunté aux Indiens deux notions nouvelles : le *Sinus* et le *Sinus verse*[9], accompagnés peut-être de tableaux contenant quelques valeurs de ces deux lignes. En ce qui concerne la première notion, c'est son nom indien *jiba* (ou *ardajiba*) qui aurait donné (après une transcription et une arabisation phonétique de la prononciation) le mot *jayb* (qui signifie « *poche* »). Plus tard, les traducteurs latins du XIIe siècle ont tout simplement traduit, par le sens, le mot arabe qu'ils avaient rencontré dans les ouvrages astronomiques ; ce qui a donné le mot *sinus*[10].

À vrai dire, on ne sait pas, avec certitude, par l'intermédiaire de quels écrits indiens ces notions sont parvenues aux astronomes arabes. Quoi qu'il en soit, il semble bien qu'ils les aient connues et utilisées avant les notions grecques déjà évoquées. Cela a eu lieu soit directement à travers des ouvrages indiens, soit indirectement à travers des écrits astronomiques persans reproduisant eux-mêmes une partie de la tradition astronomique de l'Inde. On peut donc considérer que la première phase de l'astronomie et de la trigonométrie arabes a été indienne. C'est bien ce que confirme le plus ancien témoignage qui nous soit parvenu. Il est rapporté par le bio bibliographe andalou Ṣācid al-Andalusī (m. 1068) qui l'attribue à l'astronome Ibn al-Ādamī (IXe s.)[11]. On apprend en effet qu'en 773 une délégation de l'Inde a rendu visite au calife al-Manṣūr (754-775) et, à cette occasion, elle lui a offert un *Siddhanta*, c'est à dire un ouvrage astronomique en sanscrit. Les historiens précisent aussi que le calife avait ordonné immédiatement sa traduction en arabe et que c'est Muḥammad al-Fazārī (m. vers 777) qui a été chargé de réaliser ce travail.

Les *Sidhānta*, dont la transcription arabe est « *Sindhind* », sont des poèmes astronomiques. Le plus connu est le *Brāhma-sphuṭa-siddhānta* de BRAHMAGUPTA (m. vers 660). Mais c'est peut-être un second ouvrage de cet auteur, le *Khaṇḍa-khādyaka*, qui a été traduit par al-Fazārī. Comme la matière est à peu près la même, d'un *Siddhānta* à l'autre (du moins pour les ouvrages antérieurs au VIIIe siècle), voici les chapitres essentiels qui y sont traités à partir du contenu du traité de *Brahmagupta*. Sa première moitié contient le calcul des mouvements moyens des planètes, les moments des éclipses de lune et de soleil, le lever et le coucher des étoiles, etc. La seconde moitié contient, en particulier, des procédés et des outils arithmétiques, algébriques et trigonométriques, ainsi que leur utilisation pour résoudre des problèmes astronomiques[12].

La géométrie sphérique est la discipline mathématique qui est à la base du développement de la trigonométrie arabe, dans la mesure où elle en a été à la fois un outil d'expression et un puissant instrument de validation. Comme on le sait, cette discipline est exclusivement grecque. Au VIIIe siècle, les premiers astronomes arabes l'ont découverte, essentiellement, dans trois ouvrages : les *Sphériques* de THÉODOSE (IIe s.)[13], la Sphère mobile d'Autolykos (IIIe s.)[14] et les *Sphériques* de MÉNÉLAÜS (IIe s.)[15]. C'est en fait ce dernier ouvrage qui était l'outil par excellence de l'astronomie grecque et, d'une manière plus précise, la proposition 1 du Livre III qui établit le *théorème du quadrilatère complet* que j'ai déjà évoqué (et que les astronomes arabes ont appelé *ash-shakl al-qaṭṭāc* [la figure sécante]). Ce qui explique pourquoi de grands mathématiciens, comme Thābit Ibn Qurra (m. 901), ont consacré des ouvrages entiers pour redémontrer ce théorème, l'expliciter et en généraliser l'utilisation en établissant des formules équivalentes[16].

9. $\sin(\alpha) = R\sin(\alpha)$; $\mathrm{Sinverse}(\alpha) = R[1-\cos(\alpha)]$, R étant le rayon du cercle de référence (et valant, suivant les auteurs et les calculs, 60, 120, 150 ou 3438). Il semble que les astronomes indiens ont commencé par utiliser la notion grecque de la corde de l'angle double avant de lui substituer, à partir du VIe siècle, le sinus de l'angle.

10. Le *sinus verse* est appelé *sahm*, ce qui signifie *flèche* en arabe. Le sinus verse permet d'avoir des valeurs toujours positives (distinctes) que l'angle soit aigu ou obtus.

11. Ṣācid al-Andalusī : *Kitāb ṭabaqāt al-umam* [Livre des catégories des nations], H. Bucalwān (édit.), Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīca, 1985, pp. 130-132.

12. D'autres *Sindhānta* on pu circuler au IXe siècle, comme le Khaṇḍa-khādyaka de Brahmagupta et le *Sūrya-siddhānta*.

13. Les *Sphériques* de THÉODOSE ont été traduites deux fois en arabe, une première fois par Thābit Ibn Qurra et une seconde par Qusṭā Ibn Lūqā. Voir T. HEATH : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., vol. 1, pp. 349-350.

14. La *Sphère mobile* d'AUTOLYKOS a été traduit en arabe par Isḥāq Ibn Ḥunayn, au IXe siècle. Voir T. HEATH : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., pp. 348-349.

15. Aucune version grecque des *Sphériques* de MÉNÉLAÜS ne nous est parvenue. C'est la version arabe d'Isḥāq Ibn Ḥunayn, révisée par Ibn cIrāq au XIe siècle qui a, semble-t-il, le plus circulé. Voir T. HEATH : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., vol. 2, pp. 261-273.

16. Ibn Qurra : *Kitāb fi-sh-shakl al-mulaqqab bi l-qaṭṭāc* [Livre sur la figure appelée sécante], Ms. Istanbul, Aya Sofya 4832/7, ff. 45a-49b ; *Risāla ilā l-mutacallimīn fī n-nisba al-mu'allafa* [Epître à ceux qui apprennent le rapport composé].

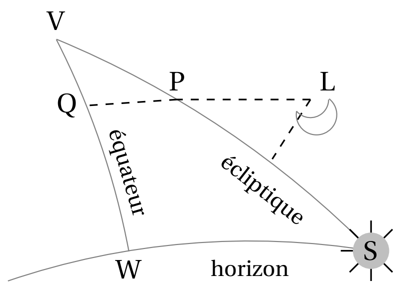
2 Les nouveaux outils de la trigonométrie

Parmi les problèmes qui ont sollicité les premiers outils trigonométriques et qui ont favorisé, d'une manière indirecte, l'élaboration de nouvelles notions et de nouveaux outils, il y a ceux qui étaient liés aux pratiques de la nouvelle religion. Après une longue période, de plus de 150 ans, où les solutions à ces problèmes étaient puisées dans le savoir traditionnel (basé essentiellement sur l'observation et la connaissance du ciel), des demandes se sont exprimées, vraisemblablement dans l'élite de la société, pour que chacun de ces problèmes ait une réponse scientifique.

Le premier d'entre eux concernait la détermination du début et de la fin du mois de jeûne et, plus généralement, l'établissement du calendrier lunaire musulman. Avant le IXe siècle, les pratiquants se contentaient de scruter le ciel pour voir le nouveau croissant de Lune. Lorsque les astronomes ont eu une meilleure connaissance du mouvement des planètes, ils ont constaté que la visibilité de ce croissant n'était pas un problème simple à prévoir. En effet, sa solution scientifique, qui est basée sur une hypothèse empruntée aux Indiens [17], fait intervenir quatre paramètres : la différence de longitude entre le Soleil et la Lune, la latitude de la Lune, la latitude du lieu et la situation météorologique du moment qui conditionne la luminosité du Soleil. Il n'est donc pas étonnant qu'il ait fallu attendre le début du IXe siècle avant d'avoir les premières tables de visibilité du croissant de lune. Pour construire ces tables, il est nécessaire de déterminer certaines valeurs dont une fait intervenir, dans son calcul, la cotangente d'un angle [18].

Visibilité du croissant de lune et trigonométrie

Si $\beta = LN$, $\lambda_m = VN$, $\lambda_s = VS$,
ϕ la latitude du lieu, $\mu = cot(\phi)$, $\rho(\lambda)$ l'ascension droite de λ,
on calcule $\lambda'_m = \lambda_m + \mu$, et si on note :
$\sigma(\lambda) = \rho(l + 180°) - 180°$
alors la différence $\sigma(\lambda'_m) - \sigma(\lambda_m)$ est la condition de visibilité du croissant de lune.



Le second problème lié à la pratique religieuse était la détermination des heures des cinq prières quotidiennes. Là aussi, le développement de la trigonométrie allait permettre de se libérer des méthodes traditionnelles (basées sur l'allongement de l'ombre du gnomon), en permettant l'établissement de tables donnant, pour chaque latitude, les moments précis des deux prières du jour, le *ẓuhr* et le *ᶜaṣr*.

Cela dit, cette libération est restée souvent très théorique, les usagers préférant continuer à utiliser les procédés traditionnels. Ce statut quo a même été encouragé, ici ou là, par des hommes de religion bien informés mais quelque peu conservateurs. C'est le cas de cet auteur yéménite du XIIIe siècle, al-Aṣbaḥī, qui a écrit, dans son traité d'astronomie populaire :

> « *Les temps des prières ne doivent pas être déterminés par les degrés marqués sur un astrolabe ni par le calcul utilisant la science des astronomes. Ils doivent être déterminés uniquement par l'observation directe (...). Les astronomes tirent leurs connaissances d'Euclide et du Sindhind, ainsi que d'Aristote et d'autres philosophes, qui sont tous des infidèles* [19] ».

17. L'hypothèse admise par les astronomes de l'Inde est que le croissant peut être vu lorsque la différence entre les couchers du Soleil et de la lune est de 12° équatoriaux, soit 48 minutes.

18. D. A. KING : *Some Early Islamic Tables for Determining Lunar Crescent Visibility*, D. A. KING & G. SALIBA (edit.) : *From Deferent to Equant : A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*, New York, New York Academy of Sciences, 1987, pp. 186-187. Reproduit dans D. A. KING : *Astronomy in the Service of Islam, Variorum*, Ashgate Publishing Limited, Aldershot, 1993, chap. II.

19. D. A. KING : *Mīqāt* : *Astronomical timekeeping*. Reproduit dans D. A. KING : *Astronomy in the Service of Islam*, op. cit., chap. V, pp. 1-7.

Détermination du temps et trigonométrie

Si t est l'angle horaire, φ la latitude du lieu, h l'altitude observée du soleil, δ sa déclinaison et H son altitude méridienne ($H = 90° - \varphi + \delta$), la formule exacte utilisée par certains astronomes arabes, exprimée d'une manière moderne, est :

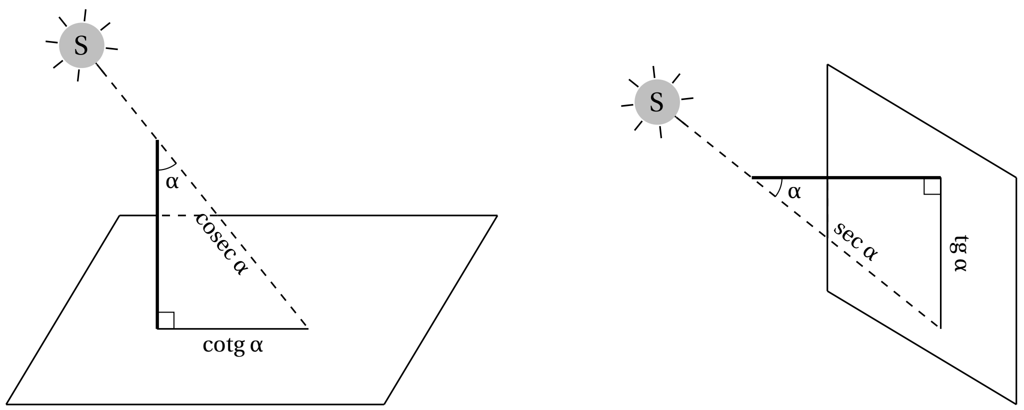
$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\delta \times \sin\varphi}{\cos\delta \times \cos\varphi}$$

D'autres utilisaient, pour toutes les latitudes, la formule approchée suivante (où $T = D - t$, avec D le demi-arc diurne) :

$$T = \frac{1}{15}\arcsin\left(\frac{\sin h}{\sin H}\right)$$

Sur le plan théorique, le besoin de déterminer le temps des prières a probablement favorisé l'étude approfondie des aspects mathématiques de la gnomonique (c'est à dire le calcul du temps à l'aide du déplacement de l'ombre d'un gnomon). Dans ce domaine, la trigonométrie s'est manifestée d'abord par la tabulation des longueurs des ombres puis par l'établissement de relations entre cette ombre et les autres éléments trigonométriques connus, c'est à dire le sinus et le cosinus. C'est ainsi qu'ont été dégagées, puis abondamment utilisées, les notions de tangente et de cotangente qui n'étaient, à l'origine, que l'ombre d'un gnomon planté sur un plan vertical (pour la tangente) ou horizontal (pour la cotangente).

Tangente et cotangente comme ombres du gnomon



Le troisième et dernier problème concerne la détermination de la direction de la Qibla [20]. Avant le développement de la trigonométrie, l'orientation vers la Mecque était fixée de diverses manières, certaines approximatives d'autres franchement erronées. C'est ainsi que toute une catégorie de mosquées d'Egypte, du Maghreb et d'ailleurs a eu une orientation de 27° sud-est pour se conformer à la tradition des compagnons du Prophète. Comme ce dernier, pendant son séjour à Médine, dirigeait ses prières vers le Sud, il s'est trouvé des croyants dans différentes régions de l'empire, pour orienter leurs mosquées dans cette direction, dans le seul but de suivre ce qu'avait fait le Prophète de son vivant [21]. Ce n'est qu'au début du IXe siècle que des astronomes, comme Ḥabash al-Ḥāsib (m. 870), ont établi la formule trigonométrique exacte fournissant cette direction à partir de n'importe quel point de la Terre. Là aussi, la complexité de la formule a obligé les astronomes à lui substituer des expressions approchées relativement plus simples. Certaines de ces formules (exprimées en fonction des lignes trigonométriques nouvelles) ont servi à confectionner des tables plus ou moins volumineuse donnant la direction de Qibla pour de nombreuses villes de l'empire musulman [22].

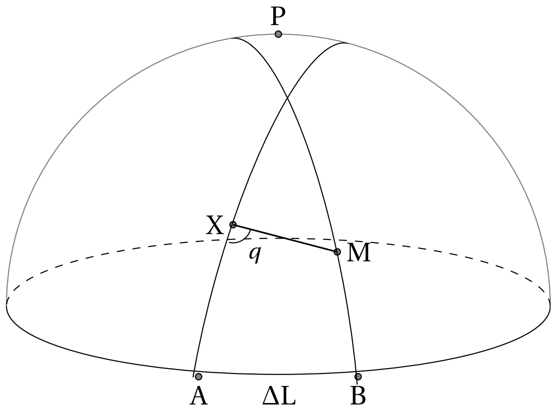
20. La Qibla est la direction de la Mecque, c'est à dire celle vers laquelle doit se diriger tout musulman au moment de la prière.
21. La ville de Médine est au nord de la Mecque.
22. D. A. KING : The Earliest Islamic Mathematical Methods and Tables for Finding the Direction of Mecca, *Zietschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 3 (1986), pp. 82-149.

Malgré cela, la solution trigonométrique n'a pas été systématiquement appliquée lorsqu'il s'est agi, en particulier, de déterminer l'orientation des nouvelles mosquées, et on a continué, dans tous les coins de l'empire, à utiliser des orientations erronées [23].

La détermination de la direction de la Qibla à partir d'un lieu X

M étant la position de la Mecque, il s'agit de déterminer l'angle q, connaissant les latitudes φ_X et φ_M (respectivement de X et de M) ainsi que la différence ΔL de longitude entre les deux points X et M. La formule exacte établie au IXe siècle est équivalente à celle-ci :

$$q = \mathrm{Arcot}\left(\frac{\sin\varphi_X \cos\Delta L - \cos\varphi_X \tan\varphi_M}{\sin\Delta L}\right)$$



.

3 Trigonométrie et mathématique

Sur le plan théorique et mathématique, la phase arabe de la trigonométrie a connu plusieurs étapes qui répondaient beaucoup plus à la dynamique interne de son développement qu'aux sollicitations externes, même si ces dernières ont été un sérieux stimulant. En effet, comme on va le voir, l'élaboration, au début du IXe siècle, des réponses scientifiques à chacun des problèmes posés par la nouvelle religion n'a pas signifié l'arrêt du développement de l'astronomie mathématique, bien au contraire. Mais revenons aux premiers pas de la trigonométrie arabe comme ensemble d'instruments au service de l'astronomie.

3.1 Les premiers pas de la trigonométrie arabe

Au niveau des outils de base de la trigonométrie arabe, il y a d'abord ceux de l'arithmétique. Les calculs, hérités des astronomes grecs utilisaient le système sexagésimal positionnel. Cela a nécessité d'abord l'élaboration de tables de multiplication, dites *jadwal sattīnī* [table sexagésimale] qui ne pouvaient pas être apprises par cœur à cause de leur longueur et qui devaient être constamment consultées par les calculateurs [24]. La plupart de ces tables possèdent 3600 entrées mais il en existe de 260 000 entrées [25]. Il y avait également des tables de quotients servant dans les calculs approchés par interpolation [26].

Ces tables étaient écrites avec le système de numération alphabétique que les astronomes arabes avaient emprunté aux Grecs mais en l'arabisant, ce qui n'a pas posé de problème puisque l'alphabet arabe dispose de 28 lettres. Cela a permis d'affecter 9 lettres aux unités, 9 aux dizaines, 9 aux centaines et la 28e lettre aux milliers. C'est également cette numération qui intervient, exclusivement, dans les *zīj* [tables astronomiques] qui ont été confectionnés, en pays d'Islam, depuis le IXe siècle (et dont le nombre dépasse 200 d'après le décompte fait par E. S. Kennedy) [27].

23. D. A. KING : Science in the Service of Religion : the case of Islam, *Impact of Science on Society*, 159 (1990), Paris, UNESCO, pp. 253-260. Reproduit dans D. A. KING : *Astronomy in the service of Islam*, op. cit., chap. I, pp. 253-260.
24. D. A. KING : On Medieval Islamic Multiplication Tables, *Historia Mathematica 1* (1974), pp. 317-323.
25. Les tables de 3600 entrées donnaient les résultats de $m \times n$, avec m et n variant, respectivement de 1 à 60. Celle de 260 000 entrées donne les résultats de $m \times n$ avec
$m = 0,1;0,2;\ldots;59,59;1,0$ et $n = 1,2,\ldots,60$.
26. D. A. KING : Supplementary Notes on Medieval Islamic Multiplication Tables, *Historia Mathematica 6* (1979), pp. 405-417.
27. E. S. KENNEDY : A Survey of Islamic Astronomical Tables, *Transactions of the American Philosophical Society*, vol. 46, Part 2 (1956), pp. 1-55.

La numérotation sexagésimale arabe

	ط	ح	ز	و	ه	د	ج	ب	أ
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	ص	ف	ع	س	ن	م	ل	ك	ي
	90	80	70	60	50	40	30	20	10
غ	ظ	ض	ذ	خ	ث	ت	ش	ر	ق
1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100

Le second outil qui va apparaître dans la seconde moitié du X^{e} siècle mais qui s'imposera bien plus tard, est le cercle trigonométrique. Au cours de la première période de l'astronomie arabe (VIII^{e}-IX^{e} s.), les cercles qui intervenaient dans différents calculs avaient des rayons variables, choisis en fonction des problèmes à résoudre. À partir d'un certain moment, les astronomes ont adopté un cercle de rayon 60, indépendamment de la nature du problème étudié. Le choix de 60 peut s'expliquer, rationnellement, par le fait que tous les calculs se faisaient en base 60 ; mais la véritable raison est peut-être tout simplement le triomphe de l'astronomie ptoléméenne qui utilisait exclusivement cette base. À partir du X^{e} siècle, soit comme conséquence du développement quantitatif des calculs exigés par l'élaboration des tables astronomiques, soit par souci de simplification dans l'établissement des relations entre les lignes trigonométriques, le cercle trigonométrique de rayon 1 fait son apparition. Il semble que ce soit Abū l-Wafā' (m. 997) qui ait été le premier à utiliser le cercle unité, dans l'un de ses traités d'astronomie, suivi un peu plus tard par al-Bīrūnī (m. 1048), dans son *al-Qānūn al-mas*ᶜ*ūdī* [Le canon masudien] [28].

Au niveau de la matière trigonométrique elle-même, son élaboration va accompagner le développement de l'astronomie et la résolution de certains de ses problèmes. Après la phase de traduction, et même pendant cette phase, de nouveaux écrits rédigés en arabe vont être publiés. Ils s'inscrivent dans la tradition indienne. Parmi les auteurs qui ont utilisé les notions trigonométriques empruntées à l'Inde, il y a al-Fazārī, le traducteur du *Siddhānta* parvenu à Bagdad et que j'ai déjà évoqué. Il est le premier d'une lignée d'astronomes qui ont travaillé avec les outils indiens. Par la suite, il y eut al-Khwārizmī (m. 850), Ḥabash al-Ḥāsib et Ibn al-Ādamī. C'est d'ailleurs al-Khwārizmī qui aurait confectionné les premières tables arabes de sinus. Quant au second, il aurait été le premier à avoir introduit la notion de tangente (comme ombre d'un gnomon horizontal) et à l'avoir tabulée. Deux autres grandeurs issues de la gonomonique vont également être utilisées : la sécante et la cosécante [29].

Parallèlement, les tenants des méthodes grecques ont développé de nouvelles activités et il semble bien que, de la fin du VIII^{e} siècle au début du IX^{e}, il y ait eu une sorte de cohabitation des deux écoles, à Bagdad même. Plus tard, la tradition indienne va être absorbée dans une sorte de synthèse à dominante ptoléméenne, réalisée par les astronomes du X^{e} siècle. Cette synthèse va adopter la norme grecque au niveau des démarches et du discours scientifique tout en continuant, au niveau technique, à utiliser un certain nombre de notions et d'outils indiens.

Les premières formules qui font le lien entre les objets trigonométriques apparaissent vers le milieu du IX^{e} siècle. La plupart de ces formules n'étaient pas dégagées de l'astronomie dans la mesure où elles étaient établies en réponse à des questions purement astronomiques et pour des paramètres liés aux mouvements des corps célestes [30]. Plus tard, elles seront exposées avec des variables non spécifiées. Mais il faut signaler

28. A. P. YOUSCHKEVITCH : *Les mathématiques arabes (*XIII^{e}–XV^{e} *siècles)*, M. CASENAVE & K. JAOUICHE (trad.), Paris, Vrin, 1976, p. 134. M.-TH. DEBARNOT : *Trigonométrie*, in *Histoire des sciences arabes*, R. RASHED (édit.), Paris, Seuil, 1997, p. 189. Le rayon égal à 1 serait apparu, pour la première fois, dans le chapitre 6 du Livre I du traité d'Abū l-Wafā', *Iṣlāḥ al-Majisṭī* [La Révision de l'Almageste].

29. À l'origine, sec(α) est, dans le cas d'un gnomon horizontal, l'hypoténuse du triangle rectangle d'angle au sommet α et dont les côtés de l'angle droit sont le gnomon et son ombre (c'est-à-dire tg(α)). Dans le cas du gnomon vertical, l'hypoténuse correspond à cosec(α).

30. C'est le cas de certaines fonctions auxiliaires établies par Ḥabash al-Ḥāsib. Voir M. T. DEBARNOT : *Trigonométrie*, op. cit., p. 179.

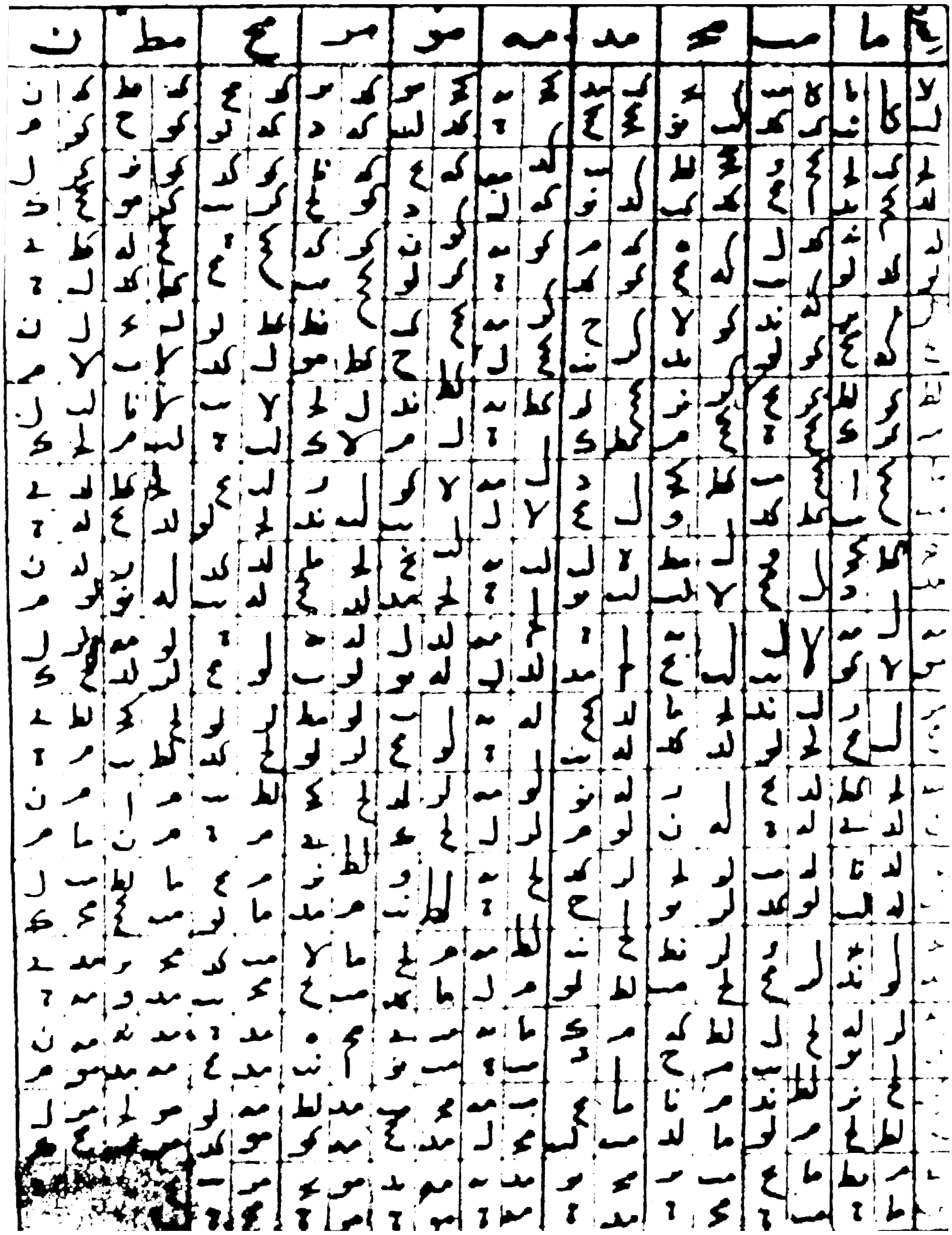


FIGURE 1 – Une table de multiplication sexagésimale

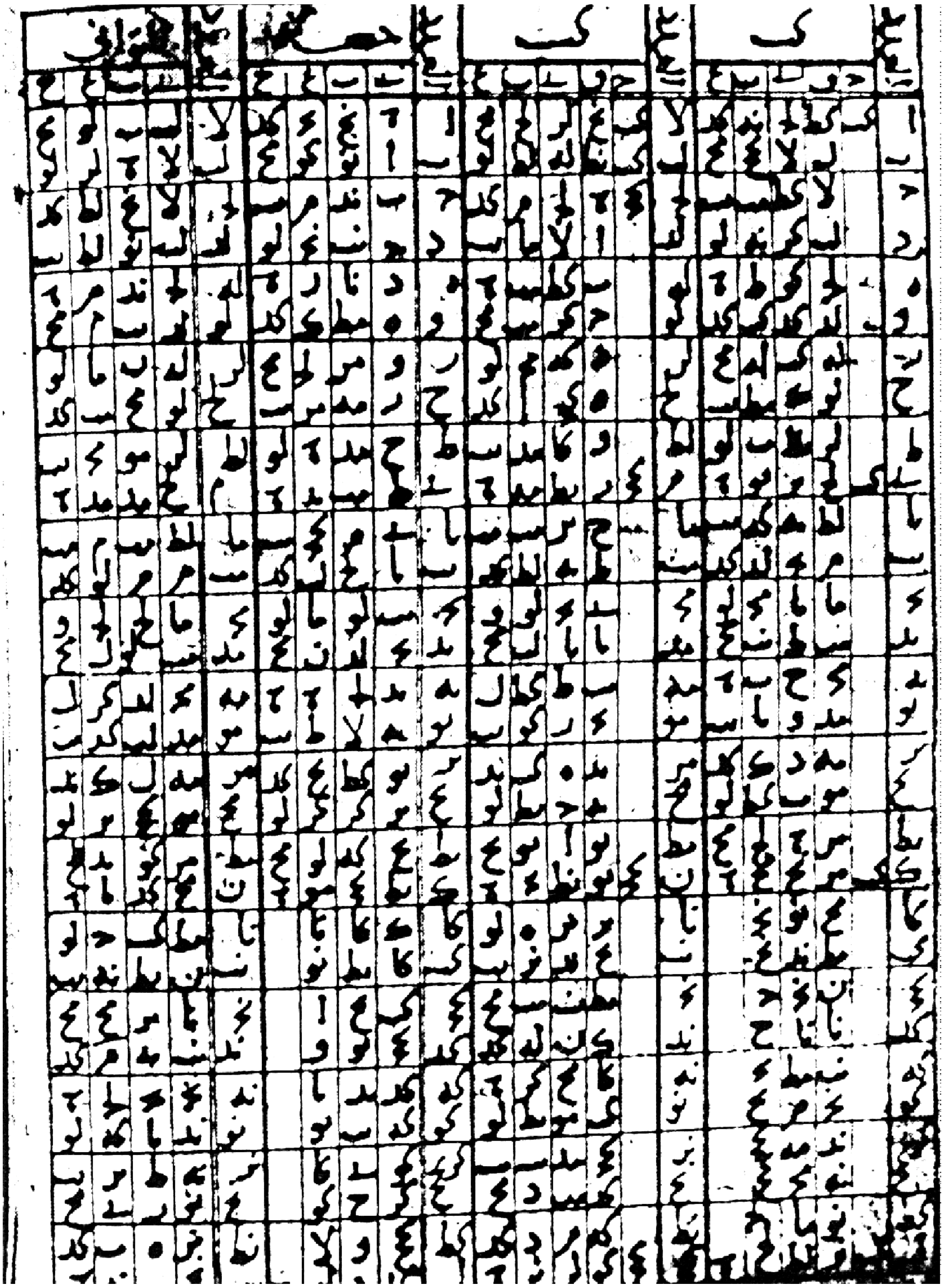


FIGURE 2 – Une page d'une table astronomique

certaines formules strictement trigonométriques, comme celle qui exprime $\cos(2a)$ en fonction de $\sin(a)$ et qui a été établie par Ḥabash al-Ḥāsib [31].

Au Xe siècle, de nouveaux progrès vont être enregistrés dans le domaine de la trigonométrie. En voici quelques illustrations : à la suite de l'assimilation de la théorie des rapports du Livre V des *Éléments* d'EUCLIDE et, surtout, de son « arithmétisation » [32], de nouvelles relations entre les lignes trigonométriques vont être établies. Il y a eu d'abord celles qui permettent d'exprimer cinq des sept lignes trigonométriques en fonction des deux restantes : le sinus et le cosinus. A partir de ce moment là, la voie était ouverte pour l'abandon de certaines de ces lignes. Mais, peut-être par habitude, les astronomes arabes ont continué à les utiliser toutes. Il faudra attendre l'avènement de la trigonométrie européenne pour voir disparaître le sinus-verse, la sécante et la cosécante.

Quelques formules trigonométriques établies au Xe siècle

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)};\ \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\sec(\alpha) = \sqrt{1+\tan^2(\alpha)};\ \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)};\ \mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

Pour les besoins liés à la construction de certaines tables, on a aussi établi différentes formules exprimant les lignes trigonométriques des sommes et des différences d'angles [33].

Formules d'addition et de soustraction

Abū l-Wafā' :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \sin\beta.\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha.\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha.\sin^2\beta}$$

Ibn Yūnus :

$$\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

Parallèlement, des progrès sont réalisés dans la précision du calcul et dans l'affinement des approximations des valeurs trigonométriques calculées en vue de dresser des tables. Cela s'est fait de plusieurs manières. On a commencé par introduire les nouvelles notions trigonométriques dans les procédés anciens, comme celui déjà utilisé par PTOLÉMÉE dans l'*Almageste*, pour calculer la corde d'un degré [34]. Puis certains astronomes ont cherché des procédés d'approximation pour affiner certaines valeurs astronomiques en vue de construire des tables plus précises. Dans le prolongement du procédé d'interpolation de PTOLÉMÉE, et dans le but d'affiner les valeurs de la table des sinus, Ibn Yūnus (m. 1001) et, d'une manière indépendante, al-Bīrūnī ont introduit l'interpolation quadratique [35].

Au IXe siècle, Ḥabash al-Ḥāsib a utilisé une itération basée sur une formule équivalente à l'équation dite

31. Il s'agit de la relation : $\sin^2(a) = [1 - cos(2a)]/2$.

32. Cette expression signifie que les grandeurs qui interviennent dans les rapports, et les rapports eux-mêmes, sont manipulés comme des nombres, même si les justifications théoriques ne viendront que plus tard. De plus, à l'opération de « composition des rapports », qui intervient constamment par l'intermédiaire du théorème de la figure sécante, on va substituer la multiplication.

33. Voir M. TH. DEBARNOT : *Trigonométrie*, op. cit., p. 164 et 188.

34. PTOLÉMÉE : L'*Almageste*, op. cit., pp. 26-37 ; E. S. KENNEDY : *The History of Trigonometry*, in *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, The National Council of Teachers of Mathematics : 31st Yearbook, 1969, pp. 337-338.

35. E. S. KENNEDY : *A Medieval Interpolation Scheme Using Second Order Differences*, in E. S. KENNEDY : *Sudies in the Islamic Exact Sciences*, D. A. KING & M. H. KENNEDY (edit.), Beyrouth, Université américaine, 1983, pp. 522-525 ; E. S. KENNEDY : *The Motivation of al-Bīrūnī's Second Order Interpolation Scheme*, in E. S. KENNEDY : *Studies in the Islamic Exact Sciences*, op. cit., pp. 630-634.

de KEPLER : $t = \theta - m.\sin(\theta)$ [36]. Plus tard, al-Bīrūnī utilisera, dans son grand traité, le *Canon masudien*, sa connaissance de l'algèbre pour ramener le problème de la trisection de l'angle (qui permet de calculer sin1° connaissant sin3°) à une équation du 3ᵉ degré dont il a déterminé une solution par itération [37]. Le mathématicien du XVᵉ siècle al-Kāshī suivra une démarche semblable pour le calcul de sin1° [38].

Procédés d'approximation et trigonométrie

Procédé de Ḥabash :
Pour t et m donnés, il s'agit de déterminer θ vérifiant : $\theta = t + m.\sin(\theta)$.
On calcule successivement :

$$\theta_0 = t + m.\sin t;\ \theta_1 = t + m.\sin\theta_0; \ldots ; \theta_n = t + m.\sin\theta_{n-1}$$

Procédé d'al-Kashī pour déterminer sin1° :
On a : $\sin 3° = 3\sin 1° - 4\sin^3 1°$;
Si $a = \sin 3°$ est donné, et $x = \sin 1°$, on a : $x = \dfrac{(a+4x^3)}{3}$.
Et : $x_n = \dfrac{(a+4x^3_{n-1})}{3}$;
al-Kāshī obtient : $\sin 1° = 0,017452406437283571$.

3.2 Les nouveaux théorèmes

Au XIᵉ siècle, la découverte d'un nouveau résultat trigonométrique va être considéré comme un événement important par les astronomes. Jusqu'à la fin du siècle précédent, leur outil par excellence était la *figure sécante*. Les astronomes arabes de la tradition grecque l'ont d'abord utilisée dans sa formulation ptoléméenne, c'est à dire à l'aide de la corde de l'angle double, en la justifiant de différentes façons, puis ils ont remplacé la corde par le sinus. Mais, le changement de formulation n'introduisait pas de simplifications majeures dans les calculs qui étaient réalisés à l'aide de cet instrument.

Il y a eu également les premières tentatives de résolution des triangles sphériques qui ont abouti, à la fin du Xᵉ siècle, à l'énoncé de six relations du triangle rectangle. Puis, à une époque indéterminée, deux nouveaux théorèmes ont été établis, toujours dans le but de faciliter les calculs. Il s'agit de la règle des quatre quantités et de la règle des tangentes (dite la figure de l'ombre), résultats que l'on doit à Abū l-Wafā' [39].

Quelques nouveaux théorèmes

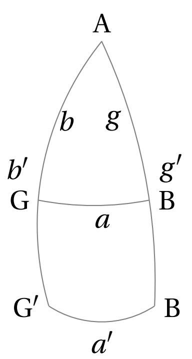
Si ABG, AB′G′ sont deux triangles de côtés des arcs de grands cercles, de même sommet A, et si G et G′ sont droits, alors on a :
Règle des quatre quantités :

$$\frac{\sin(g)}{\sin(g')} = \frac{\sin(a)}{\sin(a')}$$

Règle des tangentes :

$$\frac{\sin(b)}{\sin(b')} = \frac{\tan(a)}{\tan(a')}$$

.



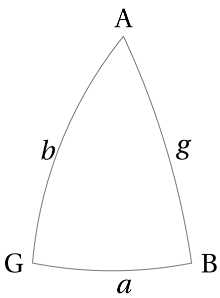
36. Pour l'étude de la parallaxe, Ḥabash a besoin d'une fonction d'interpolation sur [0ř, 180ř] ayant un maximum k en une valeur donnée $90° - m$. Il prend la fonction $\varphi(t) = k\sin\theta$ avec θ défini implicitement par $t = \theta - m\sin\theta$. Voir E. S. KENNEDY : An Early Method of Successive Approximation, Centaurus, 13 (1969), pp. 248-250.
37. M.-TH. DEBARNOT : *Trigonométrie*, op. cit., pp. 194-195.
38. Op. cit., pp. 196-198.
39. M.-TH. DEBARNOT : *Trigonométrie*, op. cit., pp. 174-175.

Il est intéressant de constater que ni ce dernier ni un autre astronome connu de cette époque n'a revendiqué la paternité de l'un ou l'autre de ces résultats. Ce qui ne sera pas le cas pour le théorème général du sinus, connu sous le nom de *figure qui dispense* (parce qu'il évitait aux astronomes l'utilisation de la fameuse *figure sécante*). Ce nouvel instrument permettait une grande économie de calcul dans la mesure où l'inconnue recherchée pouvait être déterminée à partir de trois données (au lieu de cinq avec la *figure sécante*) et en effectuant à chaque fois deux opérations arithmétiques (une multiplication et une division), au lieu de quatre précédemment (c'est à dire deux multiplications et deux divisions). Ainsi, si on avait à calculer 1000 fois une valeur inconnue, on avait besoin de connaître 3000 valeurs au lieu de 5000. De plus, on avait à faire 2000 opérations au lieu de 4000. Comme l'astronomie « consommait » beaucoup de calculs pour l'établissement des tables de toutes sortes (de lignes trigonométriques, de fonctions auxiliaires, de positions des différents astres, de visibilité du croissant de lune, etc.) et que ces tables étaient parfois volumineuses, il n'est pas étonnant que la découverte du théorème du sinus ait été perçue comme une contribution importante.

Le théorème du sinus

Si a, b, g sont des arcs de grands cercles et A, B, G, respectivement leurs angles opposés, on a :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\mathrm{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\mathrm{B})} = \frac{\sin(g)}{\sin(\mathrm{G})}$$



.

Il n'est pas non plus étonnant que cette découverte ait soulevé un problème de priorité et provoqué une vigoureuse polémique. C'est al-Bīrūnī (un des acteurs de cet « événement » et donc un contemporain des différents astronomes qui ont revendiqué la paternité de la nouvelle formule) qui nous rapporte les éléments essentiels du débat. Voici ce qu'il en dit dans son livre *Les clefs de l'astronomie* où il retrace le contenu de la polémique, sa genèse et son développement et où il décrit, sans complaisance, une partie de la communauté scientifique de son époque en évoquant d'autres polémiques devenues célèbres :

> « *Si nos contemporains voient se multiplier les domaines de la connaissance, s'ils sont naturellement enclins à rechercher en toute science la perfection, s'ils réussissent même, par des mérites accrus, là où les Anciens les plus illustres avaient échoué, on trouve chez eux des comportements qui contrastent avec ce que nous venons de dire. Une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. Ils se jalousent mutuellement. Querelles et disputes l'emportent au point que chacun envie l'autre et se glorifie de ce qui n'est pas de lui. Tel pille les découvertes d'autrui, se les attribue et en tire profit, et il voudrait encore que l'on feigne de ne pas s'en apercevoir ; mieux, qui dénonce son imposture est aussitôt pris à partie et exposé à sa vindicte. Ainsi l'a-t-on vu au sein d'une élite de nos contemporains à propos de la construction de l'heptagone régulier, de la trisection de l'angle et de la duplication du cube. C'est aussi ce qui se produit entre un certain nombre de savants au sujet d'une figure aisée à comprendre, facile à utiliser, qui vise les mêmes objectifs que la « figure sécante » et la remplace parfaitement dans toutes ses applications*[40] ».

3.3 L'autonomisation de la trigonométrie

Les historiens de l'astronomie et des mathématiques arabes sont d'accord pour dire que le processus d'autonomisation de la trigonométrie, préalable à son émergence comme discipline à part entière, a commencé en pays d'Islam et que ce processus a eu lieu dans le cadre d'un programme précis : celui de la

40. M.-Th. Debarnot : *Les Clefs de l'Astronomie, La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du* X^{e} *siècle*, Damas, Institut français de Damas, 1985, p. 94.

résolution des équations du triangle sphérique. Après une première période que j'ai déjà évoquée, au cours de laquelle les outils trigonométriques exprimaient des relations particulières entre tels ou tels paramètres astronomiques liés aux mouvements des astres (ascension droite, déclinaison, mouvement moyen, etc.), les scientifiques se sont mis à chercher, systématiquement, les relations existant entre les éléments d'un triangle sphérique (d'abord rectangle puis quelconque) [41]. C'est dans le cadre de ces recherches que des théorèmes généraux ont été établis et ont été appliqués aux problèmes de l'astronomie.

Le livre le plus représentatif de cette phase et le plus achevé dans la réalisation du projet est celui d'al-Bīrūnī, les *Clefs de l'astronomie*. Il est divisé en deux grandes parties à peu près égales en volume, précédés d'une longue introduction historique : la première est consacrée aux outils trigonométriques, c'est à dire les différentes variantes de la démonstration du théorème général du sinus, la résolution des triangles rectangles sphériques puis celle des triangles quelconques. La seconde partie est entièrement consacrée à l'application des outils précédents pour la résolution des problèmes d'astronomie [42]. Mais, il faut signaler pour la même époque la publication d'ouvrages qui exposaient les notions et les outils trigonométriques dans des chapitres indépendants des problèmes astronomiques. C'est ce qu'a fait Abū l-Wafā' dans son traité sur *La Révision de l'Almageste* et Abū Naṣr Ibn ᶜIrāq dans son *Epître sur les arcs célestes* [43].

La dernière phase est marquée par la publication d'ouvrages consacrés exclusivement aux outils de la trigonométrie et à la résolution des triangles sphériques. Trois de ces écrits nous sont parvenus. Le plus ancien, qui est encore anonyme, est intitulé *Le Recueil des règles de l'astronomie*. On y trouve une introduction suivie de quelques lemmes techniques, un chapitre sur la composition des rapports, un autre sur la figure sécante, plane et sphérique et un troisième sur le théorème général du sinus et la résolution des triangles sphériques [44].

Le second ouvrage a été publié dans la seconde moitié du XIᵉ siècle, en Espagne cette fois, par Ibn Muᶜādh al-Jayyānī (m. 1079). Il s'agit du *Livre des arcs inconnus de la sphère*. Parmi les particularités de ce livre il y a la manipulation de la tangente uniquement comme rapport du sinus et du cosinus. Il y a aussi la résolution des triangles sphériques sans traiter les triangles rectangles. Il y a enfin, apparemment pour la première fois, la discussion des cas où la résolution du triangle est impossible [45]. Puisque nous sommes en Espagne, il faut signaler, pour la suite de cet exposé, que le travail d'al-Jayyānī a probablement contribué à la diffusion des nouveaux résultats. On en trouve en effet un certain nombre dans l'important traité de Jābir Ibn Aflaḥ (XIIᵉ s.), intitulé la *Révision de l'Almageste* [46]. Mais il est également possible que certains éléments de trigonométrie, et en particulier le théorème général du sinus, ait circulé encore plus rapidement par l'intermédiaire de la fameuse somme philosophique, le *Livre de la guérison*, d'Ibn Sīnā (m. 1037) qui a été également traduite en latin au XIIᵉ siècle [47].

Le troisième et dernier ouvrage connu est le *Livre sur la figure sécante* de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 1274). Il est en cinq chapitres mais son plan global et les thèmes exposés sont identiques à ceux du traité anonyme [48]. La grande différence entre les deux ouvrages, en faveur du second, se situe au niveau de la simplicité et de l'élégance de l'exposé et des démonstrations.

41. Le mathématicien al-Khāzin (Xᵉ s.) aurait été le premier à avoir résolu la plupart des équations du triangle sphérique quelconque.

42. Op. cit., pp. 88-293.

43. P. LUCKEY : *Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung* (On Abū Naṣr Ibn ᶜIrāq), Deutsche Mathematik (Leipzig) 5 (1940), pp. 405-446.

44. Anonyme : Jāmiᶜ qawānīn ᶜilm al-hay'a [Recueil des règles de l'astronomie], Ms. Istanbul, Topkapi Saray n° 3342/1 ; N. G. HAIRETDINOVA : Trigonometriceskii isfahanskogo anonima, *Istoriko-matematitcheskie issledovaniya*, 17 (1966), pp. 449-464.

45. M. V. VILLUENDAS : *La trigonometria europea en el siglo XI, Estudio de la obra de Ibn Muᶜad El Kitab Mayhulat*, Barcelone, Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas letras, 1979 ; J. SAMSO : Notas sobre la trigonometria esferica de ibn Mu'ad, *Awrāq* 3 (1980).

46. P. DUHEM : *Le système du monde, Histoire des doctrines cosmologiques, de Platon à Copernic*. 1-10.P., 1913-1959 ; 1954-1984.

47. A. DJEBBAR : *Les mathématiques dans l'œuvre d'Ibn Sīnā* (370/980-428/1037), Actes des Journées Avicenne (Marrakech, 25-26 Septembre 1998), Marrakech, G. I. E. S., 1999, pp. 51-70.

48. A. PACHA CARATHÉODORY : *Traité du quadrilatère*, Constantinople, 1891. Le livre est en 5 chapitres, les deux premiers et le quatrième traitent des rapports composés et du théorème de Ménélaüs. Le troisième est consacré au théorème du sinus et tout le chapitre 5 est réservé à la trigonométrie.

3.4 La circulation de la trigonométrie arabe

Des études comparatives relativement récentes ont établi que la circulation de la trigonométrie arabe en Europe a été plus importante qu'on ne l'a pensé et écrit. Parmi les livres de la tradition grecque des cordes qui étaient accessibles, dès le XII^e siècle, à travers une version latine ou hébraïque, il y a le *Traité de la figure sécante* de Thābit Ibn Qurra, traduit en latin par Gérard de Crémone. Un ouvrage de l'astronome andalou Jābir Ibn Aflaḥ (XIIe s.) portant le même titre a été également traduit, en hébreu cette fois [49]. Mais, ce dernier savant est surtout connu dans l'Europe médiévale pour sa *Révision de l'Almageste* dont la traduction a, semble-t-il, beaucoup servi puisqu'elle était encore en circulation au XVIe siècle [50]. En plus des outils trigonométriques des IXe-Xe siècles, ce traité contient des résultats importants, en particulier le théorème général du sinus et la formule qui sera connue en Europe sous le nom de « théorème de Géber » [51]. On sait d'ailleurs que le premier spécialiste européen dans cette discipline, Régiomontanus (m. 1476), a connu la traduction du livre d'Ibn Aflaḥ et s'en est inspiré, en particulier dans son *De Triangulis Omnimodis* [52]. C'est ce qui apparaît à l'issue d'une étude comparée des deux contenus [53]. Nous n'avons pas d'information ou de traces matérielles d'une éventuelle traduction du livre d'al-Jayyānī, mais il semblerait que Régiomontanus ait eu connaissance de son contenu, soit directement soit à travers l'ouvrage d'Ibn Aflaḥ. Il est également possible, compte tenu d'un certain nombre de similitude dans les résultats et dans les démarches qu'il ait été également informé du contenu du traité anonyme, *Le Recueil des règles de l'astronomie* [54].

En conclusion, il faut remarquer que si, à partir de la fin du XIIIe siècle, avec le ralentissement des activités scientifiques en pays d'Islam, les recherches vont décliner dans de nombreux foyers scientifiques [55] et que les acquis des IXe-XIIe siècle vont être de moins en moins enseignés, la trigonométrie ne va pas disparaître des manuels d'astronomie et de certains instruments, bien au contraire. Des centaines d'ouvrages ou de tables, des milliers de cadrans et d'astrolabes, produits à partir du XIVe siècle, ont continué à utiliser les lignes trigonométriques devenues des outils aussi familiers que les chiffres du système décimal positionnel ou les objets de l'algèbre. On a continué ainsi à tracer les carré des tangentes sur les dos des astrolabes [56], à calculer, tous les ans, les moments des prières quotidiennes et à confectionner des tables de visibilité du croissant de lune.

49. Ibn Aflaḥ : *Fī ash-shakl al-qaṭṭāᶜ* [Sur la figure sécante], Ms. Oxford, Hebr. n° 433/2.

50. Ibn Aflaḥ : *Geberi filii Affla Hispalensis de astronomie*, Libri IX, P. Apianus (édit.), Nuremberg, 1534.

51. Il s'agit de $\sin B/R = \cos A/\cos a$, dans un triangle sphérique de côtés a, b, c et de sommets A, B, C.

52. J. REGIOMONTANUS : *De Triangulis Omnimodis*, B. Hughes (édit. & trad.), Madison, University of Wisconsin press, 1967.

53. N. G. HAIRETDINOVA : *On the Oriental Sources of the Regiomontanus' Trigonometric Treatise*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 23, 90-91 (1970), pp. 61-66.

54. N. G. HAIRETDINOVA : *On Spherical Trigonometry in the Medieval Near East and in Europe*, Historia Mathematica 13 (1986), pp. 136-146.

55. D'autres foyers, comme celui de Damas au XIVe siècle et, surtout, celui de Samarcande au début du XVe, connaîtront quelques avancées significatives. Mais, dans l'ensemble, la dynamique des IXe-XIIe siècle a disparu.

56. Dans le dos de l'astrolabe, il y a, généralement, un rectangle constitué de deux carrés appelés carrés des ombres. Deux côtés de chaque carré, qui sont gradués de 1 à 12, permettent d'avoir directement la tangente (respectivement la cotangente) de l'angle correspondant au point visé par l'alidade. Cela permet de calculer des hauteurs ou des profondeurs inaccessibles.