Mots-clé :

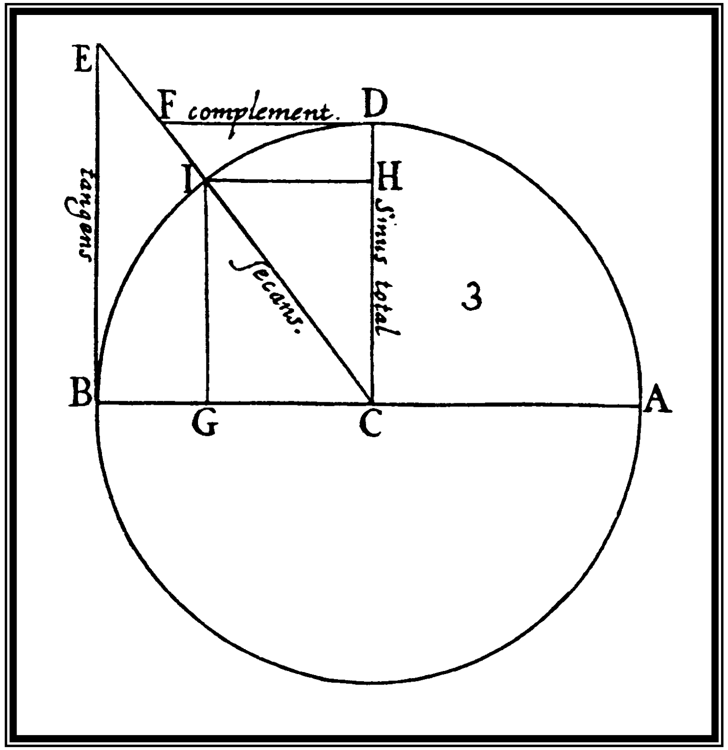
Géométrie pratique, XVI^{e} & XVII^{e} siècles.
Sinus droit, sinus total, cosinus, sinus verse, corde, tangente, sécante, cotangente.
Relations métriques dans le triangle.
Trigonométrie.
Règle des sinus.
Résolution de triangles.

Association "Mathématiques en Bourgogne"
IREM, Université de Bourgogne
9, avenue Alain Savary - B.P. 47.870
21078 DIJON Cedex
Secrétariat : frederic.metin@u-bourgogne.fr

Pour le Plaisir...n° 1

SAMUEL MAROLOIS (1)

Practique de Geometrie (1616)



-LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES-
-RÉSOLUTIONS DE TRIANGLES-

Avec des notes de
Marie-Noëlle RACINE & Frédéric METIN.
Mai 2001

Biographie sommaire :

(Extrait de *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, Vol. 2, col. 873-875, notice de Cornelis de Waard, aimablement traduite par **Jan Van Maanen**, que nous remercions ici.)

Samuel Marolois est né vers 1572, dans le Nord des Pays Bas, il était le fils de Nicola(a)s, qui avait émigré (d'où venait-il ?) autour de 1570, et vivait à La Haye (il est signalé dans les registres de l'église protestante de La Haye en 1592.)

Marolois commence ses activités professionnelles en 1606 (enseignant et conseiller en mathématiques et matières techniques). Il se marie avec Hester le Maire, et travaille avec les frères de sa femme, marchands à Amsterdam, sur des projets techniques. Par exemple, en 1611, ils reçoivent un octroi pour un nouveau type de moulin à cheval. On sait que cette année-là, il devient propriétaire d'une maison à La Haye (dans le "Papestraat").

En 1612 il brigue la succession de Van Ceulen (professeur à l'École des Ingénieurs de Leiden, qui était décédé le 31/12/1610). Une recommandation en sa faveur aux Curateurs de l'Université (datée du 3/2/1612) est publiée dans le vol. 2 des archives de l'Université de Leiden[1]. Sur ses capacités de mathématicien, il est dit : "Non seulement il est très expérimenté dans ce domaine, mais il surpasse les autres." Marolois intervient aussi auprès du prince Maurits[2]. qui le recommande également à Leiden. Dans sa lettre à Maurits, Marolois rappelle les vertus de son père pour le prince et le pays, et parlant de ses propres qualités, il affirme être "venu à grands frais, assiduité, efforts et travail à la parfaite connaissance de la chose même" (= des mathématiques). Il ne sera pas nommé, car c'est Frans van Schooten (le père) qui succédera à Van Ceulen en 1615.

Marolois occupe alors diverses fonctions techniques : Contrôleur de l'Artillerie en 1618, Rapporteur aux Etats Généraux sur une méthode de longitude de Jan Hendrickz Jarichs van der Leij en 1612 et 1618 ; on le retrouve en 1618 dans un Comité avec Stevin, Snellous et Dou. Il est en 1618 l'un des anciens de l'Église Wallonne de La Haye.

Samuel Marolois est décédé avant 1627, probablement à La Haye.

Le texte qui suit est extrait de la première édition des *Œuvres Complètes* de Samuel Marolois, publiée en Hollande en 1616, et composée, dans l'ordre, de : 1. *Geometrie contenant la theorie et practicque d'icelle necessaire a la fortification* (1616), 2. *Perspective contenant la theorie et practicque d'icelle*. (1614-1615), 3. *Fortification, ou Architecture militaire, tant offensive que defensive*... (1615). La géométrie devait venir en premier mais fut imprimée en dernier, elle apparaît d'ailleurs parfois seule (c'est le cas de l'exemplaire auquel nous nous référons, aimablement mis à notre disposition par l'***Académie François Bourdon*** du Creusot.)

[1] P.C. Molhuysen, *Bronnen tot de geschiedenis der Leidsche Universiteit*, 's-Gravenhage (= La Haye), vol. 29, dans la série "Rijks geschiedkundige publicatien", pp. 43-44.
[2] Molhuysen vol. 2, pp. 68-69.

Composition : Daouya Commaret & Frédéric Métin.
Révisions et notes : Marie-Noëlle Racine & Frédéric Métin.
Humour approximatif : Patrick Guyot.

3ème version, avec quelques corrections de détail.
ISBN : en cours.

Extrait de : Samuel Marolois, *Opera Mathematica ou Œuvres mathematicques traictans de Geometrie, Perspective Architecture et Fortifications*… Hagae-Comitis, ex Officina Henrici Hondii, MDCXIIII. (date incertaine), première partie *Geometrie, contenant la Theorie et la Practique d'icelle, necessaire a la Fortification*, Hagae-Comitis, ex Officina Henrici Hondii, Arnhemi, apud Ioannem Ianssonium, 1616.

Exemplaire appartenant à l'***Académie François Bourdon*** du Creusot (Saône et Loire.)

Le texte présenté constitue l'introduction de la troisième partie, application de la géométrie théorique à la mesure des longueurs, hauteurs (totalement ou en partie inaccessibles) et aires planes. Ces mesures consistant pour la plupart à des estimations d'angles par visée, puis à des résolutions de triangles, il était nécessaire d'avoir un exposé solide de l'usage des lignes trigonométriques dans les triangles.

Plan de cet extrait de l'ouvrage de Marolois :

Définitions : Sinus droit, sinus total, sinus complément (*cosinus*), sinus verse, corde, tangente, sécante, complément de la tangente (*cotangente*).
Applications au triangle rectangle, au triangle obtusangle.
Théorème de la proportionnalité des sinus aux côtés (*règle des sinus*).
Résolution d'un triangle connaissant : deux côtés & un angle (trois possibilités),
deux angles & un côté,
trois côtés.
Exemples de chacune de ces résolutions.

Nous avons cherché à reproduire le texte le plus fidèlement possible, sans en modifier l'orthographe ni la mise en page. La police de caractère utilisée est moderne, afin de faciliter la lecture.

Les notes sont regroupées à la fin du texte, juste avant les planches.

Les renvois aux *Éléments d'Euclide* se réfèrent tous à l'édition française la plus récente et la plus complète de cet ouvrage, dans la traduction de Bernard Vitrac et avec ses commentaires, publiée aux PUF depuis 1990.

LA TROISIEME PARTIE. DE LA PRACTIQVE
De Geometrie de Samuel Marolois

Traictant

De l'usage de table Sinus, tagente & secante, en la longuemetrie, Altimetrie & Planimetrie[1]

NEstoit que nous sommes d'intention[2] de calculer cy apres, les longueurs, largeurs et profundeurs par le tables de Sinus, Tangente, & Secante, nous eussions obmis les difinitions principes & fondamens d'icelles, mais craignans de rendre lesdictes supputations trop obscurs & difficiles avons trouve bon d'en toucher icy le plus briefvement qu'il nous sera possible comme s'ensuit.

Difinition. I.

Quand de quelque point en la peripherie du demy cercle[3] se tire une ligne droicte perpendiculaire sur le Diametre d'iceluy, icelle perpendiculaire se nomme Sinus droict.

Demonstration.[4]

I.[5]

Au demy cercle marqué I. A. G. B. est mené du poinct G. en la circonference d'iceluy la perpendiculaire G. H. sur le Diametre A, B. laquelle est appellee Sinus droict,[6] & de tous autres poincts en la circonference d'iceluy estans menees lignes perpendiculaires elles seront toutes appellees Sinus droict.

Difinition 2.

Arcx[7] du Sinus droicts, sont les deux segmens de la circonference dudict demy cercle causez par le dict Sinus droict.

Demonstration.

I.

Les arcx A,G. & G,B. de la premiere figure sont arcx du Sinus droict G, H. de sorte que tous Sinus a deux arcx duquel l'un surpasse le quart de la circonference[8] & l'autre est moindre que ledit quart, n'est que[9] le Sinus tombe au centre d'iceluy cercle, & est lors appelle Sinus totus ou Sinus entier.[10]

Difinit: 3.

Sinus complement[11] est une ligne tombante à angles droicts de l'extremite du Sinus droicts sur le Sinus totus ou Sinus entier.

Demonstration.

I.

La ligne G, E. de la premiere figure tombante a angles droits de l'extremé du Sinus droict H, G. sur le Sinus entier G, E. est appelle Sinus Complement a cause que son arcq G, D. accomplit, ou perfaict le quare de cercle A, D. dont A, G. est l'arcq du Sinus droict G, H.

Difinition. 4.

Sinus versus ou Sagette[12], est une ligne droicte perpendiculaire sur le Sinus droict touchante la Peripherie du demy cercle laquelle est aussi la difference du Sinus complement au Sinus totus ou entier.[13]

Demonstration.

I.

La ligne A H. de la premiere Figure est Sagette de larcq A, G. laquelle est a angles droicts sur le Sinus droict G, H. & est aussi la difference du Sinus complement G,D. on[14] C,H. son esgal au Sinus entier D, C. ou C, A. Notez aussi que D, E.peut estre dict Sagette de l'arcq D, G. lequel est arcq complement de G, H.[15]

Difinition 5.

Le Sinus droict & le Sinus complement estans prolongez jusques a ce qu'ils coupent la peripherie du cercle ils seront doubles ausdicts Sinus.[16]

Explication.

2.

Si en la seconde figure au cercle A. cy dessus, le Sinus droict E, F. & le Sinus complement E. G. sont prolongéz iceux couperont la circonference du cercle es poincts O. & K. & a cause que E . F . est a angles droicts sur le Diametre A. B. O. E.[17] sera double de O . F . ou F . E. par la 3. du 3.[18] du mesme est K. E.[19] double de G. E.

Difinition 6.

Tout double Sinus & Sinus complement se dict corde de l'arcq qu'il soubstient.

Explication.

2.

K.E. en la 2. Figure est corde de l'arcq K.D.E. & E.O. corde de l'arcq E.B.O. par ou apart[20] que si le Diametre du cercle divise quelque ligne inscripte en iceluy en deux esgalement qu'icelle moitie sera le Sinus , de la moitie de l'arcq.[21] On peut aussi remarcquer pourquoy les Sinus versus tant F.B. que G.D. se nomment Sagettes, car tout ainsi comme l'archer pour decocher la flesche la met au milieu de son arcq ainsi est aussi cette Sagette F.B. au millieu de l'arcq E.B.O. & G.D. au millieu de K.D.E. &c.

Definition. 7.

Tangente est une ligne tiree perpendiculairement de l'extremité du diametre sur iceluy.[22]

Explication

3.

Soit le demy cercle A . F.B.[23] de la 3. figure dont son diametre est A.B. de l'extremite duquel est eslevee la ligne B. E.[24] a angles droicts sur ledict diametre A. B. Ie dis qu'icelle est appellee tangente, a cause qu'estant prolongée ne feroit que toucher le cercle par la I6. du 3.[25]

Difinition. 8.

Secante est une ligne tiree du centre du cercle couppante la peripherie.[26]

Expli-

Explication.

3.

La ligne C.E. en la troisieme figure est nommée secante des arcqs I.B. & I A. laquelle est dicte secante pour ce qu'elle coupe la circonference en I. & la tangente en E. estant B. E. tangente des mesmes arcqs B.I. & I.A.[27]

Difinition 9.

Complement de la tangente est une ligne tiree de l'extremité du Sinus total á angles droicts sur iceluy coupante la secante en quelque endroict.[28]

Explication.

3.

La ligne D. F. de la 3. figure estant eslevee a angles droicts sur C D. le Sinus total, & couppante la secante C. E. en F. sera ladite D. F. le complement de la tangente B.E. & le complement de la secante C.E. sera par consequent C.F.[29]

Difinit. 10.[30]

Si en un triangle rectangle l'hypothenuze[31] est pris pour le demy diametre la perpendiculaire[32] sera Sinus droict, & la base sera Sinus complement.[33]

Demonstration.

4.

Soit le triangle A . B . C . 4. Figure[34] rectangle en C. Ie di lors qu'on prend[35] A. B. pour demy diametre que la perpendiculaire B. C. est Sinus droict de l'angle A. dont sa magnitude est denoté par l'arcq B. D.[36] & le Sinus complement dudict angle A. qui est l'angle B. dont sa grandeur est denoté par l'arcq A. E.[37] est A. C. la raison est que A. & B font ensemble un angle droict comme apart par la 32. du I.[38]

Difinition. 11.

Si en un triangle, rectangle la base est prise pour demy diametre la perpendiculaire sera la tangente & l'hypothenuze la secante de l'angle aigu en la base.

Demonstration.

5.

Si au triangle, rectangle A . B . C . 5. figure la base A. C. est prise pour demy diametre & faict l'arcq C. D. la perpendiculaire C. B. sera la tangente de l'angle A. ou l'arcq C. D.[39] & l'hypothenuze A. B. sera la secante du mesme angle A. ou arcq C. D.

Difinition. 12.

Si le triangle est oblicangle[40] estant de l'angle superieur faict un arcq de la distance du perpendiculaire couppant les deux autres costés, icelle perpendiculaire sera demy diametre, les segmens[41] seront les tangentes des portions de l'angle superieur divisé par la dicte perpendiculaire & les deux costéz dudict triangle sont les secantes des mesmes angles.

Demonstration.

6.

Comme au triangle A . B . C . 6. figure estant faict de l'angle B. & de la distance B. D. la perpendiculaire, l'arcq E. D. F le segment D. C. est tangente de l'arcq D. F. ou de l'angle D. B. F.[42] le segment D. A. est la tangente de l'arcq D. E. ou de l'angle D. B. E. le coste A. B. est la secante dudict arcq D. E. ou de l'angle E. B. D. & le costé B. C. est la secante de l'arcq D. F. ou l'angle D. B. F.[43]

Difin. 13.

Mais si B. C. en la mesme figure est le demy diametre B. D. la perpendiculaire sera Sinus droict de l'angle C.[44] & ainsi consecutivement.

Defin. 14.

Tout cercle est divise en 360. degrez, & par consequent chasque quart de cercle en contient 90. degrez qui est l'angle droict, chasque degre se devise encor en 60. minutes chasque minute en 60. secondes & ainsi a l'infini.[45]

Proposition.

En tous triangles les Sinus droicts des angles qui sont en la base sont proportionaux aux costéz d'iceluy.[46]

Demonstration.

7.

Soit triangle A.B.D. 7. figure les angles qui sont en la base A. & D. je di que les Sinus d'iceux sont en mesme raison que les costez A.B.B.D. à scavoir que le Sinus de l'angle A. aura telle raison au coste B. D. que le Sinus de l'angle D. au coste A.B. Soit premieremẽt faict A.C. esgale a B.D. & soyent menees les deux perpendiculaires B.E.C.F. jcelle B.E. sera Sinus de l'angle D. & C.F. Sinus de l'angle A. par la 1. Difinition de ceste partie. Mais A.B. a B.E. est comme A. C. (ou B. D. son esgal) a C. F. par la 4. du 6.[47] A. B. l'un des costéz aura doncq telle raison au Sinus de l'angle A. qui est C.F.[48] parquoy en tous triangles. &c.[49]

Corolaire 1.

De cecy se peut colliger[50] qu'estãs donnes les 2. costéz d'un triangle & l'un des angles que tout le reste sera cognu.[51]

Demonstration 1.

8.

Soit le triangle A.B.C. 8. figure dont les deux costez A.B.B.C. & l'angle A. sont cognus je dis que les autres angles & troisieme costé seront aussi cognus car puis que le costé B.C. a telle raison au Sinus de l'angle A. que le costé A. B. au Sinus de l'angle C. s'ensuit que le rectangle du Sinus de l'angle A. & du coste A.B. sera esgal au rectangle du Sinus de l'angle C. & du coste B. C.[52] pourquoy estant divise le produict du coste A.B. & le Sinus de l'angle A. par le costé B.C. viendra le Sinus de l'angle C.[53] lequel Sinus estant cerché en la table de Sinus, se voira à l'opposite vers la main gauche les degrez & minutes que comprend ledict angle auquel estant adjoustè les degrez & minutes de l'angle A. & ceste somme soubstraict de 180. degrez a cause que les 3. angles de tout triangle contiennent 2. angles droicts qui sont 180. degrez,[54] restera l'angle B. lequel estant cognu son Sinus aura telle raison au 3. coste A.C. que le Sinus A. au coste B.C. & par ainsi sera A.C. aussi cognu suivant le Corolaire.[55]

Demonstration. 2.

9.[56]

Si au triangle A.B.C. 9. figure sont cognus les 2. costéz A . B . B . C . & l'angle C. l'operation sera semblable a la precedente, car le produict du Sinus de l'angle C. par le coste B.C. divisé par le coste A.B. vient au quotient le Sinus de l'angle A. suivant ce que dessus.

Demonstration. 3.

10.

Soit au triangle A.B.C. 10. figure, cognus les costez A . B . B . C . & l'angle B.

ses deux autres angles & troisieme costé se cognoistra. Car de l'angle A. ayant faict tomber une perpendiculaire sur C.B. le Sinus de l'angle B. aura telle raison a ladicte perpendiculaire A. D. que le Sinus de l'angle droict D. au costé A. B. parquoy.[57]
Le produict du costé A, B. par le Sinus B.
Estant divisé par le Sinus de l'angle droict D. vient A.D.[58]

De mesme se cognoistra D. B. & par consequent D. C. sera Cognu de sorte qu'au triangle, rectangle A . D . C . seront cognus les deux costez A . D . & D . C . & par ainsi A.C. sera cognu par la 47. du I.[59] ou bien par ayde des tables de tangente ou secante, en ceste sorte.

C.D. qui est cognu donne le demy diametre à scavoir 100000. que donnera A. D. qui est aussi cognu viendra la tangente de l'angle C. de sorte que l'angle C. sera cognu.[60]

Et pour puis apres avoir le troisieme angle.

Seront adjoustez les angles B. & C. & la somme soubstraict de 180. degrez a scavoir deux angles droicts restera le troisieme angle A.

Puis pour finalement avoir la base A C. par l'ayde desdictes tables.

Si le demy diametre a savoir 100000. donne C. D que donnera la secante de l'angle C. viendra la longeur A. C.[61]

Autrement.

On le pourroit aussi faire ainsi.[62]

Adjoustez les deux costez qui sera le premier nom[63] en la reigle.
Prẽnez aussi la difference d'iceux costez qui sera le second nombre en la reigle.
Prennez finalement la difference de l'angle cognu au demy cercle 180. degrez la tangente de sa moitie sera le troisieme nombre de la reigle 3.
Solution donnera la tangente d'un nombre des degrez qui ad'jouste a la motie des degrez du residu faict le plus grand angle, & soubstraict donne la moindre angle[64] dont la demonstration en est faicte en notre fortification.[65]

Corol. 2.

On peut encore inferer de ce que dessus qu'estãt donné 2. angles d'un triangle & un coste que les deux autres costez & troisieme angle seront cognus.[66]

Demonstration. I.
II.

Puis qu'au triangle A.B.C. II. figure, les angles A. & E.[67] sont cognus il apart que le troisieme angle B. sera aussi cognu.

Car la somme des angles A. & C. sousbstraict de 180. degrez restera l'angle B.

Pour les costez A.C. & C.B.

Le produict du Sinus de l'angle A. par A.B. estant divise par le Sinus de l'angle C. viendra B.C.[68]

Et pour finalement le coste A.C.

Le produict du Sinus de l'angle B. par B. C. divisé par le Sinus de l'angle A. vient A.C.

Demonstration. 3[69] *:*
12.

Si au triangle A . B . C . 12. figure sont donnez les 2. angles B. & C. & le costé B C.[70] il apart que le 3. angle & les deux autres costéz seront cognus.
Car la somme des angles B. & C. soubstraict de 180. degrez restera l'angle A.
Pour les costéz A.C. & C.B.
Le produict du Sinus de l'angle A. par A.B. divisé par le Sinus de l'angle C. vient B.C.
Et finalement pour A.C.
Le produict du Sinus de l'angle B. par A.B. divisé par le Sinus de l'angle C. vient A.C. ou bien.
Le produict du Sinus de l'angle B. par B.C. divisé par le Sinus de l'angle A. vient aussi A.C.

Demonstration. 3.
13.

Et finalement au triangle A . B . C . 13. figure[71] sont cognus les deux angles A. & B. & le coste A.B. la reste se cognoistra aussi facilement comme s'ensuit.

La somme des angles A. & B. soubstraict comme dessus de 180. degrez restera le troisieme angle C.
Et pour les costez B.C. & A.C. sera dict.
Le produict de A. B. par le Sinus de l'angle A. divisé par le Sinus de l'angle C. vient B.C.
Finalement pour A.C.
Le produict du Sinus de l'angle B. par A.B. divise par le Sinus de l'angle C.vient A.C. ou bien.

Le produict du Sinus de l'angle B. par B. C. divisé par le Sinus de l'angle A. vient aussi A.C.

Corolaire 3.

On peut aussi inferer de ce que dessus qu'estans cognus les trois costez que le trois angles seront aussi cognus.

Demonstration.
14.

Soit le triangle A. B. C. 14. figure dont les trois costez sont cognus, les trois angles se cognoistront, car par la 12. du 2. d'Eucl.[72] la perpendiculaire B.D.[73] sera tousiours cognu & aussi les segmens de la base, & par ainsi seront cognus deux triangles, rectangles A.B.D. & D. B. C. dont les trois costez sont cognus & un angle[74] & par consequent seront aussi cognus les autres angles par le Corolaire premier.

N O T E Z que

Quand les trois angles sont cognus on vient facilement a cognoistre la proportion des costez, mais n'on la vraye dimention d'iceux.

Parquoy suivant la proposition precedente, & les Corolaires subsequens supputerons par l'aide des tables de Sinus, Tagente & Secante les triangles plans comme s'ensuit.[75]

Demon-

Demonstration.

I5.[76]

Soit au triangle A.B.C, I5. figure, rectangle en A. cognu le costé A.B lequel soit de 36. verges, l'angle C. 30. degrez & par consequent[77] l'angle A. droict 90. degrez, & puis que par la 32. du I. les trois angles font deux angles droicts s'ensuit que C. & B. font aussi un angle droict de sorte qu'estant de 90. degrez soubstraict l'angle C. 30. degrez reste 60. degrez pour l'angle B. Si maintenant on veut avoir le costé B. C. sera multiplie le Sinus de l'angle A. par AB. 36. verges viendra 3600000.[78] & ce produict estant divisé par le Sinus de l'angle C. qui est 50000 viendra pour l'hypothenuze B.C. 72. verges suivant la 16. proposition du 6. d'Eucl[79] : & I9. du 7.[80] Pour maintenant cognoistre le costé A. C. sera multiplie le costé A.B. qui est 36. par le Sinus de l'angle B qui est 86603. viendra 3II7708. qui estant divisé par le Sinus de l'angle C. á scavoir 50000. viendra pour le coste A.C. 62 $\frac{17708}{50000}$ [81] verges, & par ainsi seront cognus tous les angles & costéz du triangle proposé. De mesme sera l'operation des autres triangles, rectangles, ou non rectangle, dont nous avons resolus de d'escrire jcy apres leur operations & afin de cognoistre en jceux les trois termes donnez pour par jceux trouver les autres 3. incognus, nous les marcquerons par deux petites lignes ainsi II. & les trois termes qu'on cerche seront marcquez par I.2.3. dont le premier denotera lequel on doibt premierement cercher ou trouver[82] & ainsi en ordre le tout comme les exemples ci dessoubz le monstrent.

Termes cognus de la I6 Figure.[83]

A 90, B 30 } degrez — 90 d: B 30 d: — A Sinus 100000 — AC 36

AC 36 verges[84] C 60 degrez[85] — produict 3600000

Sinus de l'angle B 50000

quotient. 72 BC[86]

B Contenant 30 degrez & A 90 degrez C sera le complement de l'angle B. á scavoir 60 degrez, a cause que par la 32 du I les trois angles d'un triangle sont esgaux a 2 angles droicts.[87]

C Sinus 86603
BC 72
produict 6235416
A Sinus I00000
quotient 62 $\frac{35416}{100000}$ AB

Termes cognus de la I7 figure.[88]

C 60, A 90 } degrez — 90 d: C 60 d: — B 60 degrez

CA 36 verges

Tangent A[89] I73205 — CA 36 — AB 62 $\frac{35380}{100000}$[90]

Secante C 200000 — CA 36 — CB 72 I00000[91]

Termes cognus de la I8 figure.

A 90 degrez; A C 36, B C 72 } verges

A Sinus 100000
A C 36
produict 3600000
di: par B C 72
quotient 50000 — 90 — B 30[92] — C 60 deg:

C Sinus 86603
B C 72
produict 6235416
di: par si: A 100000
quotient 62 $\frac{35416}{100000}$ AB

Et par les tables de Tangente & Secante se pourra trouver premierement l'angle C. ainsi

Sinus totus 100000
BC 72
produict 7200000
divisé par AC[93] 36
quotient 200000 Secant de 60 degrez pour C
90
30 B

C 60 deg : tangente I73205
A C 36
produict 6235380
div: par AV[94] I00000
quotient 62 $\frac{35380}{100000}$ AB

Termes cognus de la I9 figure.

A B 39, [95]A C 28 } verges — C Sin: 84805 — B C 28

C 58 deg: prod: 2374540

div: par A B 39

quotient 60886 si: A 37° — 30' — 26''[97]
60876 — 37 — 30
I0

60899 — 37 — 3I
60876 — 37 — 30
23 — 60 — I0

H 26 secondes[96]

A 37 — 30 — 26
C 58
95 — 30 — 26
I80 — 0 — 0
B 84 — 92 — 34[98]

99540 — 84 — 30
99537 — 84 — 29
60 — 3 — 34 (— 2
99537
B si: 99539[99]

O AB

A B 39
prod. 3882021
di.pa Si. C 84805
quotient 45 $\frac{65796}{84805}$ A C

Termes cognus de la 20 figure.[100]

A 37 — 30 — 26
C 58 — 0 — 0
A B 39 verges

C 38[101] — 0 — 0
A 37 — 30 — 26

95 — 30 — 26
180

B 84 — 29 — 34

Pour trouver le coste A C

A Sinus — 60886
A B 39
produict 2374554
di.pa Si. C 84805
quotient 28 B C[102]

B Sinus — 99539
A B 39
produict 3882021
di.par Si. C 84805
quotient 45 $\frac{65796}{84805}$ verges A C[103]

Termes cognus de la 21 figure.[104]

A B 39 } verges
B C 28 }

B 84 — 29' — 34''

B Sinus — 99539
AB 39
produict 3882021
di.par Si. D 100000[105]
quotient 38 $\frac{82021}{10000}$ A D

90
A B D 84 — 29 — 34
B A D 5 — 30 — 26[106]

5 — 31 — 9614
5 — 30 — 9585

60 — 29 — 26 { 9585 5 — 30
13

Sin: B.A.D. 9598[107]

A B 39
pro: 374322
di: par Si: A D B 100000
quotient 3 $\frac{74322}{100000}$ B D
28 B C
24 $\frac{25678}{100000}$ D C[108]

Pour trouver l'angle C

AD 3882021
Si:to:DC 100000[110]
100000
Pro. 388202100000
Di: par de[111] 2425678
quotient 160038 tang:
de 58 degrez C

Trouver l'angle A

B 84 — 29 — 34
C 51[109] — —

142 — 29 — 34
180 — —

A 37 — 30 — 26

Le mesme autrement.[112]

180
84 — 29 — 34[113]
95 — 30 — 26
47 — 45 — 13
Tang. 110105

28 39
39 28
67 — 11 — 110105

F: 18076 tang: de 10 — 14 — 47[114]
47 — 45 — 13
C 58 — 0 — 0
A 37 — 30 — 26

Dont la desmonstration se trouve en nostre fortification.

Trouver le coste A C

B C[115] Sin 99539
A B 39
produict 3882021
di.par Sin.C 84805
quotient 45 $\frac{65796}{84805}$ A C

Termes

Termes cognus de la 22 figure.

A 37 —— 30 —— 26[116]

A B 39 } verges
B C 28

C 122[117]

A 37 —— 30 —— 26

157[118] —— 30 —— 26
180

B 20 —— 29 —— 34

sin: B 35009
A.B 39

1365351

Di: par S: C 84805

quotient 16 $\frac{9988}{100000}$ A.C[121]

Trouver l'angle C

A Sin — 60886
A B 39

pro: 2374554

di:par B C 28

quotient 84806[119] dont l'arcq est 58 ou 122 pour C par ou apart que telle demande a double solution.[120]

Termes cognus de la 23 figure[122]

A.C - - 16 $\frac{9988}{100000}$ } verges
C.[124] — 28 —
C —— 122 degrez

Pour trouver C.D.

90
58 B. C. D

32 C. B. D

Sin:C. B. D — 52992
C.B 28

prod: 1483776

di:par Si:d: 100000

quotient 14 $\frac{83776}{100000}$ C. D
16 $\frac{99\ 88}{100000}$

30 $\frac{93764}{100000}$ A.D[128]

Pour trouver A. D[123]

Sin: C. 84805
C.B 28

prod: 2374540

di:par Si:D 100000

quotient 23 $\frac{74540}{100000}$ B.D

B.D - - - - - 23 $\frac{74546}{100000}$ [125]

par tan:A.D 100000[126]

prod: 2374540
di:par A.D - - - - - - 30 $\frac{93764}{100000}$

quotient [127]76753 tan. A 37 · 30 · 26

tan : 76779 - 37 - 31 76733
tan : 76733 - 37 - 30

46 —— 60 —— 20

H. 26 second : vient par ainsi pour l'angle A. 37 — 30 — 26

Trouver A B[129]

Sinus C 84805
G B[130] 28

produict 2374540
di.par Si. A 60886

quotient 39 A.B

Trouver l'angle B

37 —— 30 —— 26 A
122 C

159 —— 36[131] —— 26
180 —— - —— -

30 —— 29 —— 34 B

Si au triangle A. B. C 24 Figure sont cognus la somme de deux angles comme A & C & les deux costez comme A. B & B. C il est evident que la reste se pourra cognoistra, car la somme des deux angles soubstraict de 180 degrez restera le 3 angle[132] á sçavoir B & par consequent audict triangle seront trois termes cognus á sçavoir un angle & deux costez par lesquels on cognoit la reste.[133]

Planche 23

à insérer après les notes

Planche 24

à insérer après les notes

Notes sur le texte

[1] Il n'y a pas de table de lignes trigonométriques dans le livre de Marolois ; ce genre de table étant très commun à l'époque, l'auteur n'a sans doute pas jugé bon d'en annexer une à son propre Traité (qui n'est pas un manuel.) La troisième partie de la *Géométrie practique* de Marolois concerne la mesure des longueurs, des hauteurs et des superficies. Nous n'en reproduisons ici que l'introduction.

[2] On peut comprendre "Si nous n'avions eu l'intention…"

[3] Ce n'est donc pas le cercle qui est donné au départ, mais le demi-cercle, les points de la circonférence étant "projetés" sur un diamètre privilégié (L'horizontale ? Une ligne de terre ?) Le cercle entier ne vient qu'à la définition 5, lorsqu'il est question de corde.

[4] Il ne s'agit pas d'une démonstration au sens (mathématique) moderne mais d'une illustration : la ligne trigonométrique est simplement (dé)montrée sur la figure.

[5] Ce chiffre est un appel à la figure 1 de la première planche de cette partie (planche 23 de l'ouvrage.)

[6] Noté "sinus rectus" sur la figure 1. l'adjectif "droit" fait référence à la perpendicularité.

[7] On retrouve cette orthographe pour *arcs* à plusieurs reprises dans le texte. C'est donc normal…

[8] C'est un deuxième usage du mot, pour le cercle entier, alors que dans la définition 2, il ne s'agissait que du demi-cercle.

[9] C'est-à-dire "à moins que".

[10] C'est donc le rayon du cercle, qui dans notre pratique moderne est ramené à 1, en ne considérant les arcs que dans le cercle trigonométrique. Le sinus "total" est un maximum, celui qui réalise l'égalité des deux arcs et, en ce sens, il est "entier". (Marolois le nomme par ailleurs *sinus radius*, ou même *radius*.)

[11] Le *sinus complément* deviendra *co-sinus*. Il n'est pas vu comme une sorte d'abscisse du point, mais comme un autre sinus, qui complète le premier. En effet, on peut le voir (en tournant la figure d'un quart de tour) comme un sinus droit (ordonnée d'un point de la circonférence sur le sinus total au lieu du diamètre), dont l'arc complète le précédent pour donner le quart de cercle (cf. la suite du texte.) En outre, il s'agit toujours d'une ligne : pas question de quantités négatives

[12] On dit aussi "sinus verse", par opposition à "droit" (comme l'envers et l'endroit ?) Le mot *sagette* a la même racine que "sagittal" : il est question de flèche, comme l'auteur le rappellera dans l'explication de la définition 6, à propos de la corde.

[13] Autrement dit en termes modernes, *sin-verse* (α) = 1-*cos*α. Marolois utilise dans cette dernière remarque une propriété évidente du rectangle EGHC (GE = CH, comme dans la démonstration qui suit) ; l'idée du cosinus comme segment du diamètre est à portée de main.

[14] Deux erreurs typographiques : il s'agit de GE, et pas de GD, et la lettre *u* du mot *ou* a été renversée.

[15] Ceci confirme la remarque de la note 10 : on peut voir AC comme un sinus total, EG comme sinus de l'arc DG, ED est alors la sagette du même arc (à un quart de tour près…)

[16] L'auteur se situe maintenant dans le cercle entier, comme le montre la figure.

[17] Il manque un espace pour que le texte soit clair : "…sur le diamètre AB, OE sera double…"

[18] Référence à la troisième proposition du troisième livre des *Éléments* d'Euclide : *Si dans un cercle, une certaine droite passant par le centre coupe en deux parties égales une certaine droite ne passant pas par le centre, elle la coupe aussi à angles droits. Et si elle la coupe à angles droits, elle la coupe aussi en deux parties égales* (Euclide, *Les Éléments*, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Paris, PUF, 1990, vol. 1, p. 396.) C'est la deuxième partie de la proposition qui est utilisée.

[19] On peut lire plus facilement "…de même KE est…"

[20] "…par où (par quoi) il appert que…"

[21] Il semble, à première vue, que cette proposition soit non justifiée (le fait que la demi-corde soit perpendiculaire au diamètre), mais on peut la relier à la citation de la proposition III-3 d'Euclide.

[22] Cette définition paraît incomplète si la tangente est un segment (comme ligne trigonométrique). Ici, il s'agirait donc de la tangente au cercle ; ce n'est pas si simple, et le mot, comme de nos jours, va servir dans les deux cas, droite et ligne trigonométrique, comme le montre l'explication de la définition 8.

[23] C'est plutôt ADB, ou AIB, ou même AIDB.

[24] C'est fréquent à l'époque, on cite un point sans qu'il ait été défini au préalable. En toute rigueur, E n'aurait pas encore la valeur de point d'intersection de la tangente au cercle et de la sécante.

[25] 16ème proposition du troisième livre des *Éléments* d'Euclide : *La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée* […] (Euclide, *op. cit.*, vol. 1, p. 423). L'unicité du point de tangence est donnée en fait dans un porisme de cette proposition (Euclide, *op. cit.*, p. 425)

[26] Même problème que pour la tangente : ce n'est pas encore un segment dont la longueur serait une des lignes trigonométriques. Il ne s'agit pour l'instant que d'une droite issue du centre du cercle et qui le coupe (normal !), d'où son nom. L'explication qui suit ne lève pas l'ambiguïté, alors que dans la définition 11, sécante et tangente sont clairement vues en tant que segments.

[27] On vérifie par le calcul que cela correspond à notre définition moderne : $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, d'où, comme les quantités considérées sont positives, $EC = \frac{1}{\cos\alpha}$. De même pour la tangente, d'après le théorème de Thalès, $EB = \frac{EC}{IC} \times IG = \frac{1}{\cos\alpha} \times \sin\alpha$. Mais la fin du texte, elle, est incompatible avec notre conception, car des arcs supplémentaires ont des tangentes opposées.

[28] Complément dans le sens où DF est la tangente (même configuration que BE pour l'arc IB) de l'arc DI, qui est le complément de IB dans le quart de cercle BD. Rien n'est dit des cas pathologiques (angle nul et angle plat). Il s'agit de la cotangente, et cela se vérifie encore à l'aide du théorème de Thalès de la façon suivante $FD = \frac{IH}{HC} \times DC = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times 1 = \cot\alpha$.

[29] On retrouve comme précédemment la sécante de l'arc complémentaire dans le quart de cercle. Une nouvelle utilisation du théorème de Thalès montre que CF est bien la cosécante (quotient de la sécante par la tangente, ou inverse du sinus) de l'arc IB.

[30] Dans les définitions 10 à 13, Marolois inscrit ses concepts dans le contexte des triangles. Selon le côté choisi comme rayon du cercle, on retrouvera les lignes précédentes, relatives à l'angle considéré.

[31] Vous avez bien sûr remarqué l'orthographe ? Garantie d'époque.

[32] Dans le sens de "hauteur", relativement à la base choisie (qui n'est pas l'hypoténuse).

[33] Autrement dit, l'hypoténuse est prise comme "unité" (c'est-à-dire comme rayon du cercle "trigonométrique"), l'angle (ou l'arc) dont on considère le sinus est laissé dans l'ombre, et l'on retrouve l'équivalent de nos formules "*sinus* égal *côté opposé* sur *hypoténuse*" & "*cosinus* égal *côté adjacent* sur *hypoténuse*".

[34] Il faut lire "le triangle ABC de la 4ème figure."

[35] "Je dis, lorsqu'on prend…"

[36] C'est la première référence explicite à un angle dans cette partie du texte (il était temps !) Marolois avait défini le concept d'angle, au tout début de son ouvrage, de la manière suivante : *Angle plan, est le concours de deux lignes qui s'entre touchant en un point, & lesquelles continueez se coupent au mesme point* (définition 5, paraissant redondante si l'on oublie que le mot *ligne* signifie *segment*, et que les segments, ou les demi-droites, n'ont qu'une extrémité en commun, alors que les droites se coupent). Il fait référence à l'arc de cercle, mais sans l'identifier à l'angle (il "dénote la magnitude de l'angle").

[37] Les arcs ont même rayon, mais ne font pas partie du même cercle. La figure 4 fait la transition entre le contexte circulaire et le contexte triangulaire.

[38] La trente-deuxième proposition du premier livre des *Éléments* d'Euclide est fondamentale pour la résolution des triangles : *Dans un triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits* (Euclide, *op. cit.*, vol. 1, p. 255)

[39] Cette fois-ci l'angle et l'arc semblent assimilés l'un à l'autre, en tout cas la tangente leur est commune.

[40] Ce terme apparaît ici pour la première fois dans le livre. Il doit s'agir d'une erreur typographique, puisque Marolois définissait un triangle ayant un angle obtus sous le nom de triangle *obtusangle ou ambligonne* (sic) dans la 19ème définition, au début de l'ouvrage.

[41] Les segments de la base sont ceux qui y sont découpés par la hauteur. Ces segments interviennent dans plusieurs propositions et théorèmes de l'ouvrage. Ici (fig. 6), ce sont [CD] et [DA].

[42] Cette fois-ci l'angle est noté à la manière moderne, il reste intimement lié à l'arc.

[43] Tout cela se conçoit facilement à la simple vue de la figure 6, Marolois n'en dit pas plus.

[44] On retrouve le contexte de la définition 10.

[45] Façon de parler ! Marolois se contentera de donner les mesures angles en degrés, minutes, et secondes (d'ailleurs, les tables qu'il utilise donnent les angles de minute en minute !)

[46] C'est la "règle des sinus", explicitée dans la première phrase de la démonstration, qui d'ailleurs en est bien une, cette fois-ci, et pas seulement une illustration sur le schéma.

[47] La quatrième proposition du sixième livre des *Éléments* d'Euclide correspond à ce que nous appelons "théorème de Thalès" (expression du 19ème siècle), mais en mieux : *Dans les triangles équiangles sont en proportion les côtés autour des angles égaux, et homologues ceux qui sous-tendent les angles égaux* (Euclide, *op. cit.*, vol. 2, p. 167.) En mieux, car il n'est pas question de "configuration de Thalès" (expression inventée à la fin du vingtième siècle), mais de triangles semblables et de deux types de proportion : 1) les rapports entre côtés sont égaux dans les deux triangles, 2) les côtés qui se correspondent sont proportionnels. A vrai dire, notre théorème "de Thalès" correspond plutôt à la proposition VI-2, qui évoque une droite coupant un triangle parallèlement à l'un de ses côtés.

[48] La phrase est mal fichue, il en manque vraisemblablement une partie. On pourrait rétablir ainsi le texte : *AB l'un des costéz aura doncq telle raison au sinus de l'angle D. qui est BE, que (comme) le costé BD au sinus de l'angle A. qui est CF parquoy…*

[49] Marolois trace le point C de manière à rapporter les sinus au même demi-diamètre (AC = BD), d'après la définition 13, puis il utilise simplement le théorème "de Thalès". C'est l'intérêt des sinus en tant que côtés de triangles et non rapports de côtés ($\sin D = \frac{BE}{BD}$ et $\sin A = \frac{CE}{AC}$ dans la conception moderne) : on compare des choses de même nature. Notez que pour la figure 7, Marolois aurait dû citer la proposition VI-2 d'Euclide (voir la note précédente.)

[50] En ancien français, *déduire* (mais aussi *recueillir*.)

[51] On peut donc résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et un angle. Marolois donne trois cas de figure, selon le connu : deux côtés et un angle non compris par eux (AB, BC et l'angle A dans la démonstration 1-figure 8 ; AB, BC et l'angle C dans la démonstration 2-figure 9) ; deux côtés et l'angle qu'ils comprennent (AB, BC et l'angle B dans la démonstration 3-figure 10)

[52] Traduction : comme $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$, alors $AB \times \sin A = BC \times \sin C$ ("rectangles" = produits.)

[53] $\frac{AB \times \sin A}{BC} = \sin C$, et l'on procède à une recherche inverse dans la table des sinus.

[54] C'est la proposition I-32 d'Euclide, déjà citée à la démonstration 4-définition 10. (voir note 38.)

[55] Le troisième angle étant connu, on applique la règle des sinus : $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC}$, d'où AC.

[56] Ce cas de figure n'est pas essentiellement différent du précédent, en commençant par calculer sin A.

[57] Les sauts de ligne intempestifs n'aident pas à la compréhension ! Ces trois paragraphes n'en font en fait qu'un seul : "par quoi, le produit… étant divisé par… vient AD". Et les deux paragraphes suivants également : "…en ceste sorte : C.D. qui est cognu…"

[58] Que vaut le sinus de l'angle droit ? Comme il s'agit du *sinus totus*, il vaut en principe 100.000, dans la table qu'utilise Marolois, mais cela dépend des cas : selon les opérations à effectuer (cela se rencontre dans son livre de la *Fortification*), on peut le choisir par exemple de1.000.000, toutes les autres lignes étant en proportion.

[59] C'est le théorème de Pythagore : *Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit* (Euclide, *op. cit.*, vol. 1, p. 282.)

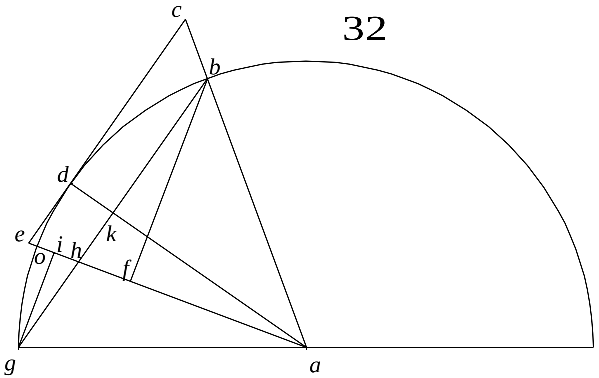
[60] La formulation n'est pas des plus simples, on la retrouve par la suite, il peut s'agir de proportions. CD étant choisi comme demi-diamètre, la définition 11 donne AD comme tangente de l'angle C ; le demi-diamètre (sinus total) étant ramené à 100.000 comme dans les tables, on trouvera par une règle de trois la valeur à laquelle ramener AD. Cela revient en quelque sorte à considérer le quotient AD/CD.

[61] Toujours par la définition 11, si CD est le demi-diamètre, alors AC = sec C, en tant qu'hypoténuse.

[62] Comme Marolois l'affirme à la fin du paragraphe, la règle qu'il donne ici est illustrée dans son livre de *Fortification* de 1615. Il s'agit d'une règle de trois entre la somme des côtés $AB+BC$, leur différence AB-BC, la tangente de la moitié de l'angle 180-B et enfin la tangente d'un angle qui donnera la solution.

[63] Lisez plutôt "nombre"

[64] Il s'agit du problème de la figure 32 de la *Fortification* : trouver les mesures de toutes les lignes d'une forteresse polygonale à onze côtés, certaines mesures étant données (flanc, face, courtine) et le rapport de deux autres ("comme 7 à 5"). La question qui se pose au début revient à celle-ci : *étant donné le triangle DAG, connaissant la somme des angles ADG et AGD* ($73+\frac{7}{11}$°) *ainsi que le rapport des côtés AG et DA* ($\frac{AG}{DA} = \frac{7}{5}$)*, trouver séparément les deux angles ADG et AGD*. Il prétend tout d'abord chercher les angles dans la même proportion que les côtés, ce qui signifie en fait que les *sinus* des angles le seront. C'est le seul problème du Traité de Fortification dans lequel Marolois donne une justification avec figure auxiliaire : il "prépare" le demi-cercle de centre a (voyez la figure 32 page suivante), dont les arcs bo et og représentent les angles cherchés (il suppose le problème résolu, les lettres utilisées n'ont rien à voir avec celles du problème de départ), d est le milieu de l'arc bg, (ec) sa tangente au point d. Les points f et i sont les projetés orthogonaux de b et g sur (ao), le rapport bf / gi étant égal à $7/5$ (eh, oui ! Puisque ce sont les sinus des angles, rapportés au demi-diamètre ao) Marolois affirme ensuite, sans grand développement, que le rapport bk / kh vaut 6/1 et qu'il est égal au rapport des tangentes dc / de, ce qui lui permet de déterminer l'angle dae (=arctan de), qui représente la demi-différence entre les angles recherchés, et comme on connaît leur demi-somme, on les connaît chacun séparément ! Ceci demande peut-être un petit développement…



Tout d'abord, on applique le théorème de Thalès à $bfhig$, puisque (bf) et (gi) sont parallèles (car toutes deux sont perpendiculaires à (ao).) et cela donne $\frac{bh}{hg} = \frac{bf}{gi} = \frac{7}{5}$, mais $\frac{bk}{kh} = \frac{0{,}5\times(bh+hg)}{0{,}5\times(bh-hg)}$ c'est-à-dire $\frac{7+5}{7-5} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}$, et c'est le rapport de la somme des côtés sur la différence des côtés. Mais en appliquant le théorème de Thalès dans ace cette fois-ci, la tangente et la corde étant parallèles, car toutes deux perpendiculaires au rayon ad, on obtient : $\frac{dc}{de} = \frac{bk}{kh}$, donc le quotient de la somme et de la différence des côtés. Sachant que dc est la tangente de la demi-somme des angles cherchés (dans notre cas, la "moitié de la différence de l'angle cognu au demy-cercle") et ed la tangente de leur demi-différence (dans notre cas "un nombre des degrez etc."), on trouve les deux angles, c q f d !

[65] Dans la première édition du recueil des Œuvres Complètes de Marolois, la *Fortification* est certes la dernière partie, mais elle a été imprimée un an avant la Géométrie ; ces questions de date expliquent pourquoi la *Fortification* est citée dans la *Géométrie*.

[66] Trois illustrations/démonstrations sont données, les deux premières lorsque l'un des angles connus est sous-tendu par le côté connu, la dernière lorsque les deux angles sont adjacents au côté connu.

[67] Il faut lire C.

[68] Application directe de la règle des sinus : puisque $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$, alors $BC = \frac{AB \times \sin A}{\sin C}$.

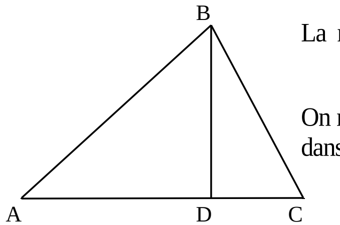
[69] Ce devrait être la démonstration 2. D'ailleurs, sont-elles fondamentalement différentes ?

[70] Encore une erreur typographique : c'est le côté AB qui est connu.

[71] La figure 13 est identique à la 12. Cela se retrouvera dans les figures 15 à 18 et 19 à 22.

[72] Plutôt la proposition II-13, car la II-12 concerne les triangles obtusangles, ce qui ne semble pas être le cas ici. Voici la proposition II-13 : *Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant*

l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu. (Euclide, *op. cit.*, vol. 1, p. 359.) On reconnaît à peine la généralisation du théorème de Pythagore, du fait de l'absence de cosinus. Il n'est d'ailleurs pas tant absent :



La relation entre les côtés s'écrit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AD$$

On retrouve le cosinus de l'angle BAC dans le dernier produit, puisque l'on a :

$$AD = AB \times \cos(BAD)$$

[73] Le point D n'est pas indiqué sur la figure, c'est le pied de la hauteur issue de B.

[74] C'est l'angle droit !

[75] La fin de cette introduction à la pratique (cette "trigonométrie") est constituée d'exemples de résolutions de triangles, qui suivent l'ordre des propositions, si ce n'est le dernier paragraphe (concernant la figure 24) qui a plutôt valeur de proposition.

[76] Cette première résolution de triangle est la seule dont le texte soit rédigé (et elle se suit très bien). Dans les suivantes, Marolois se contentera de présenter ses calculs (quasiment sous forme de tableaux.)

[77] L'expression prête à confusion ; si A est droit, c'est parce que le triangle est rectangle en A.

[78] Etonnant, non ? 100.000 pour le sinus de 90°, ça semble beaucoup. Mais c'est oublier, d'une part que l'utilisation du système décimal vient juste d'être proposée (en 1585, en flamand) par Simon Stevin, et d'autre part, que les tables de sinus-tangentes-sécantes sont données ainsi : le sinus total de 100.000 (pour une précision à cinq chiffres) et les autres valeurs proportionnellement. Nous considérerions les valeurs utilisées dans cette partie par Marolois comme approchées à cinq décimales, mais il triche un peu lorsque le résultat l'exige… (Voyez les notes 88 et 114)

[79] Proposition 16 du livre VI des *Eléments* d'Euclide : *Si quatre droites sont en proportion, le rectangle contenu par les extrêmes est égal au rectangle contenu par les moyennes* [et réciproque], ce qui revient à notre "produit en croix", les droites en question étant des segments (Euclide, *op. cit.*, vol. 2, p. 193.)

[80] Proposition 19 du livre VII des *Eléments* d'Euclide : *Si quatre nombres sont en proportion, le nombre produit à partir du premier et du quatrième sera égal au nombre produit à partir du deuxième et du troisième* [et réciproque] (Euclide, *op. cit.*, vol. 2, p. 323.) Ça ressemble à la proposition VI-16, mais il est question de nombres, non plus de segments. La citation de ces deux propositions d'Euclide à cet endroit par Marolois relève plus du souci de donner l'apparence de la rigueur que de la rigueur elle-même, puisque le calcul ne s'arrête pas aux produits égaux, mais qu'il faut encore diviser par un sinus.

[81] Les résultats sont systématiquement présentés sous la forme d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, qui n'est pas forcément décimale (si l'on ne divise pas par 100.000) et n'est jamais simplifiée. Où l'on voit que la *Disme* de Stevin (cf. note 78) n'est pas si universellement admise, alors que Marolois lui-même avertit au début de sa *Fortification*, qu'il s'en servira "puisque la chose ne requiert si grande exactitude, & que mesme les tables des sinus, tangentes & secantes sont imperfaictes…"

[82] En fait, le texte ne contient aucun des codages annoncés ici. On remarquera simplement que la présentation en est presque toujours la même : les paragraphes de calcul sont présentés en colonnes, la première contenant les quantités connues et la (ou les) suivante(s) les calculs et les résultats finaux.

[83] Cette figure et les trois suivantes correspondent aux mêmes mesures, seul ce qui est donné change.

[84] Première colonne, où sont données les valeurs connues des angles A et B et du côté AC.

[85] Seconde colonne où est simplement calculée la mesure de l'angle C (complémentaire de B.)

[86] Troisième colonne : calcul de la longueur du côté BC, à l'aide de la règle des sinus.

[87] Marolois se répète, puisqu'il a déjà fait le calcul dans la seconde colonne au-dessus. Il n'aura plus ce genre de scrupule pédagogique dans la suite du texte !

[88] Il devrait y avoir D et E à la place de A et B dans le texte. Marolois reprend en fait la figure 16, puisque 16 et 17 sont symétriques. Il devrait logiquement trouver le même résultat pour AB dans les deux, mais les arrondis dans les tables l'en empêchent. On ne l'y reprendra pas ! (cf notes 114 et 127.)

[89] Il s'agit de l'angle C, et non de A (d'ailleurs, il n'existerait pas de tangente pour A qui est droit…)

[90] Il y a un problème de mise en page, peut-être dû à la position de ces caractères en fin de page. On devrait trouver ici, comme dans le paragraphe suivant pour la 18ème figure, une division par le sinus total (de 100.000), et c'est peut-être pourquoi la partie fractionnaire du résultat n'est pas présentée sous la forme habituelle, mais suggère une division ?

[91] De même ici, si le nombre affiché était la valeur de CB, alors 1) elle serait évidemment trop grande, et 2) il y aurait un chiffre de trop (le 1). Le nombre 100.000 apparaît probablement en tant que facteur.

[92] Le sinus de A est le sinus total puisque A est droit, et l'on trouve B par son sinus qui vaut 50.000 (pour nous, 0,5 est le sinus de 30°).

[93] Retrouver AC paraît contradictoire puisque le *sinus totus*, c'est lui ! En effet BC n'est la sécante de l'angle C que parce que AC est choisi comme demi-diamètre (définition 11) Il faut penser cette présentation comme une règle de proportion ordinaire et non une application de la règle des sinus : si AC correspond à 100.000, alors BC est la sécante de C, d'où $\sec C = \frac{100000 \times BC}{AC}$, d'où C et B.

[94] *A priori* une erreur de frappe, car on s'attend à trouver ici le sinus total comme au-dessus. A moins qu'il n'ait été gênant de donner deux valeurs différentes à la même quantité AC (cf note précédente.)

[95] Ce n'est pas AC, mais BC, comme on peut le lire sur la même ligne un peu plus loin.

[96] Cette colonne-là est un calcul à part : au bas de la précédente, Marolois arrive à une valeur de 60886 pour le sinus de A, elle ne se trouve pas dans la table de sinus (qui donne les angles de minute en minute, rappelons-le). Ce que donne la table, c'est sin(37°30') = 60876 et sin(37°31') = 60899. Ces deux valeurs encadrent donc sinA avec des écarts respectifs de 10 et 23 ; les angles ont un écart de 1', soit 60", on suppose, faute de mieux, que la valeur intermédiaire est située à proportion des écarts entre les deux. Une simple règle de trois donne 26,08… secondes, voilà l'origine des 26 secondes trouvées par Marolois. Quant à la lettre H utilisée, mystère…

[97] Les signes °, ' et " ne semblent pas imprimés mais gravés sur le texte original. La décapitation du degré est d'origine…

[98] Il y a une erreur typographique (inversion) le nombre de minutes est 29, et non 92. Le calcul est basé sur la propriété I-32 d'Euclide ; A est ajouté à C, le tout soustrait de 180.

[99] Encore une règle de trois : la table des sinus donne sin(84°30') = 99540 et sin(84°29') = 99537, ce qui fait une différence de 3 pour 1 minute ou 60 secondes. Pour 34 secondes, on trouverait 1,7 et la valeur entière la plus proche est 2, ce qui explique le 99539 (= 99537+2) que donne Marolois.

[100] Sur cette figure, la mesure de l'angle A est notée "à l'envers".

[101] Il faut lire 58.

[102] En réalité, la division n'est pas exacte, le résultat est approché au dix-millième, mais Marolois s'en soucie certainement assez peu, puisque "la chose ne requiert si grande exactitude" (voir la note 81).

[103] Le calcul est identique à celui de la figure 19, et d'ailleurs la valeur de sinus B est reprise telle quelle.

[104] Il manque sur cette figure le point D, projeté orthogonal de A sur (BC). Les calculs suivent exactement le plan donné dans la démonstration 3 de la figure 10.

[105] Puisque D est droit, c'est bien le sinus total.

[106] ABD et BAD sont complémentaires dans le triangle rectangle ABD.

[107] Pour 60", il y a un écart de 29, donc pour 26" un écart de $\frac{26 \times 29}{60} = 12{,}56...$ *i.e.* 13.

[108] C'est tout simplement que DC = BC – BD.

[109] Encore une erreur typographique (ou due à Marolois ?) : ici, on doit avoir 58.

[110] Si DC est pris comme sinus total, alors AD sera bien la tangente de C. Mais il faut une règle de trois pour ramener DC à 100.000. Le facteur apparaît deux fois, sans raison particulière.

[111] C'est la valeur exacte de DC qui est donnée. Il était peut-être inconvenant de trouver dans le même calcul deux valeurs différentes de DC ? Ou *de* fait-il référence à une donnée non représentée sur la figure ou à une autre figure (de la *Fortification* par exemple)? Ce n'est peut-être pas totalement fortuit, car ce genre de mélange s'est déjà trouvé dans des circonstances similaires (cf note 94)

[112] C'est l'application de la méthode expliquée dans le paragraphe *Autrement* de la figure 10.

[113] On retrouve l'angle B, puis au-dessous 180-B, et enfin sa moitié, dont on prend la tangente ; plus loin la somme et la différence des deux côtés.

[114] Ici, c'est vraiment intéressant, car les calculs ne sont pas explicités et que l'on peut soupçonner Marolois de "s'arranger" avec les tables. En effet, la proportion préconisée dans la démonstration de la figure 10, devrait donner : $\tan\alpha = \frac{110105 \times 11}{67} = 18076{,}9403 \approx 18077$, dont l'arc tangente vaut un peu plus de 10°14'48", ce qui était tout à fait calculable par Marolois, puisque sa précision n'a rien à nous envier pour ces matières, comme on peut le vérifier en reprenant ses autres calculs. Même avec la valeur 18076, on n'obtiendrait pas 47, mais 46 secondes. Une seule explication : il fallait coûte que coûte retrouver les "bons" résultats 58° et 37°30'26", en s'accommodant de tables "imperfaictes"…

[115] Lisez plutôt "B sin".

[116] Il est noté 28 sur la figure 22.

[117] Cette valeur est justifiée par les calculs de la colonne suivante.

[118] Oh ! L'erreur… C'est bien sûr 159 (car 7 et 2 faisaient déjà 9 en 1616.)

[119] On devrait trouver 84805,5 et Marolois choisit la valeur entière approchée par excès. C'est en contradiction avec le calcul de AC qui suit, ainsi qu'avec la résolution du triangle de la figure 23, pour laquelle il prendra 84805 bien que ça ne l'arrange pas tellement pour ses résultats (voir la note 127)

[120] C'est le seul problème de cette partie dans lequel Marolois envisage deux possibilités (les deux angles sont complémentaires), c'est le seul qui s'y prête. Il n'examinera que la deuxième solution. Pour C = 58, on aurait trouvé B de 84°29'34", d'où $AB \times \sin B \div \sin C = 99538 \times 39 \div 84805$ce qui donne $AC = 45\frac{77539}{100000}$. Son calcul à lui donne plutôt AD (cf la figure 22.)

[121] Ce n'est pas la première fois que Marolois doit diviser par 84805 (voir les calculs des figures 19, 20 et 21), mais, ici, il donne le résultat en fraction décimale (un calcul supplémentaire est nécessaire.)

[122] Sur la 23$^{\text{ème}}$ figure, le symbole sous le A est certainement l'unité de mesure (un *v* pour *verges*)

[123] Plutôt A (ou éventuellement BD), car la recherche de AD est déjà l'objet de la première colonne.

[124] Erreur : il faut lire C.B.

[125] Vraisemblablement une erreur typographique, 6 à la place de 0. Mais la présentation redondante et inhabituelle du résultat, ajouté au fait que la valeur du sinus de C aurait pu être choisie égale à 84806 (cf note 119), ce qui aurait donné un numérateur de 74568, peut nous entraîner à voir cette erreur comme un *lapsus calami*. Que ceux qui pensent que ça n'existait pas avant Freud se lèvent pour protester !

[126] Ce n'est donc pas "tan:AD", mais "AD" tout court, puisqu'il est pris lui-même comme base. En effet, dans le triangle rectangle ABD, si AD est pris comme base, alors tanA = BD, et par une règle de trois, AD correspondant à 100.000, BD (= tanA) correspond alors à 100.000×BD÷AD.

[127] On retrouve les questions d'approximation évoquées dans la note 114 : le quotient, calculé avec les valeurs de Marolois, serait de 76752,4607…, donc plus proche de 76752. Calculé avec un sinus C de 84806, il vaudrait 76753,265… Avec 76753, et comme la péréquation de la suite le montre, Marolois trouve un écart de 20 avec la valeur inférieure et de 46 avec la valeur supérieure, ce qui donne 26 pour le nombre de secondes, car $\frac{60\times 20}{46} = 26{,}0869\ldots$ Avec 76752, c'est différent : l'écart à la valeur inférieure est 19 et l'écart à la valeur supérieure 47, ce qui donne $\frac{60\times 19}{47} = 24{,}255\ldots$, le moins que l'on puisse dire est que le résultat obtenu est loin des 26 secondes attendues ! Ne blâmons pas le pauvre Samuel, nous savons qu'il a théoriquement raison et que ses "petits arrangements" avec les valeurs sont pour la bonne cause (et qu'après tout, "cela ne requiert pas si grande exactitude"…)

[128] C'est la somme des deux valeurs situées au-dessus, puisque AD = AC+ CD.

[129] On remarquera que AB est déjà coté 39 sur la figure…

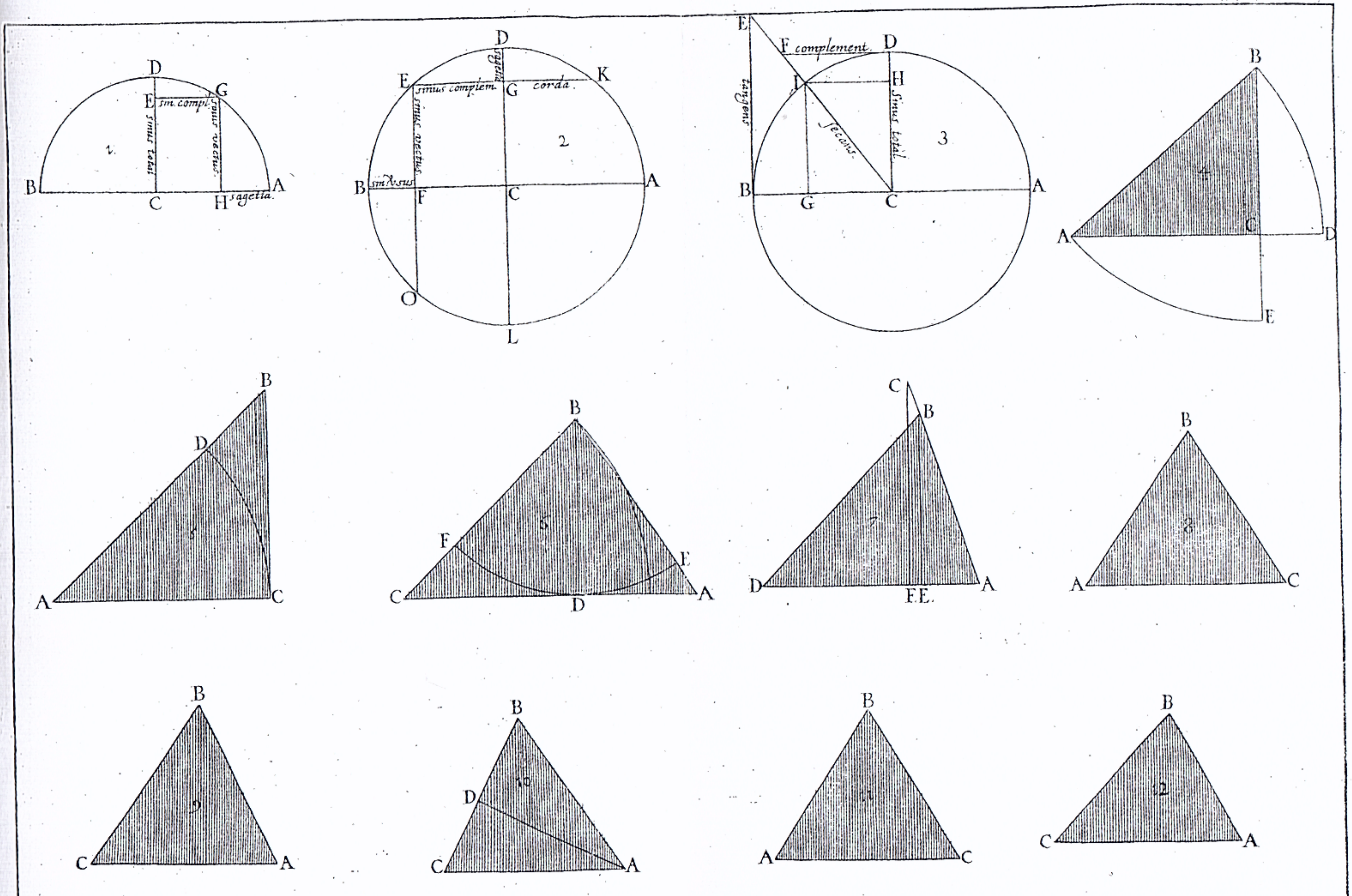
[130] Lisez CB (ce n'est pas très différent pour un typographe très myope.)

[131] Encore une erreur (fatigant, hein ? C'est bientôt fini !) : il faut lire 30 et non 36.

[132] Comprenez : le troisième angle.

[133] Ce dernier paragraphe n'est pas un exemple mais un vrai corollaire, à la manière des précédents, et il n'est pas suivi d'exemple. Est-ce par acquit de conscience que Marolois l'a inséré *in extremis* ? La suite du texte n'est plus du même ordre, il s'agit de mesures sur le terrain, puis de mesures de volumes et enfin de levers de plans. Le paragraphe qui vient immédiatement après celui qui est reproduit ici s'intitule *Descrire la fabricque d'un compas geometricque, duquel nous nous servirons cy après en toutes mes operations*. Le compas en question a l'aspect d'un compas de proportion, mais pas la même fonction : il ne sert qu'à mesurer les angles de visée. Marolois explique comment s'en servir pour mesurer des lignes distantes ou inaccessibles en partie, horizontales ou verticales, sur des exemples qui l'entraînent parfois à proposer des calculs semblables à ceux étudiés ici.

La suite, donc, dans la brochure *Pour le plaisir*… Samuel Marolois (2) : "compas géométrique – mesures de longueurs sur le terrain - utilisation de la boussole"…


D
E
G
sm. compl.
sinus totai
sinus versus
B
C
H
A
sagetta.
D
sagetta
E
K
sinus complem.
G
corda.
sinus versus
B
sin. vsus
F
C
A
O
L
2
E
F
complement.
D
H
tangens
secans.
Sinus total.
B
G
C
A
3
B
A
C
D
E
B
D
A
C
B
F
E
C
D
A
C
B
D
F.E.
A
B
A
C
B
C
A
B
D
C
A
B
A
C
B
C
A

23.