UNIVERSITÉ DE ROUEN
Faculté des Sciences
et des Techniques

Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des
Mathématiques

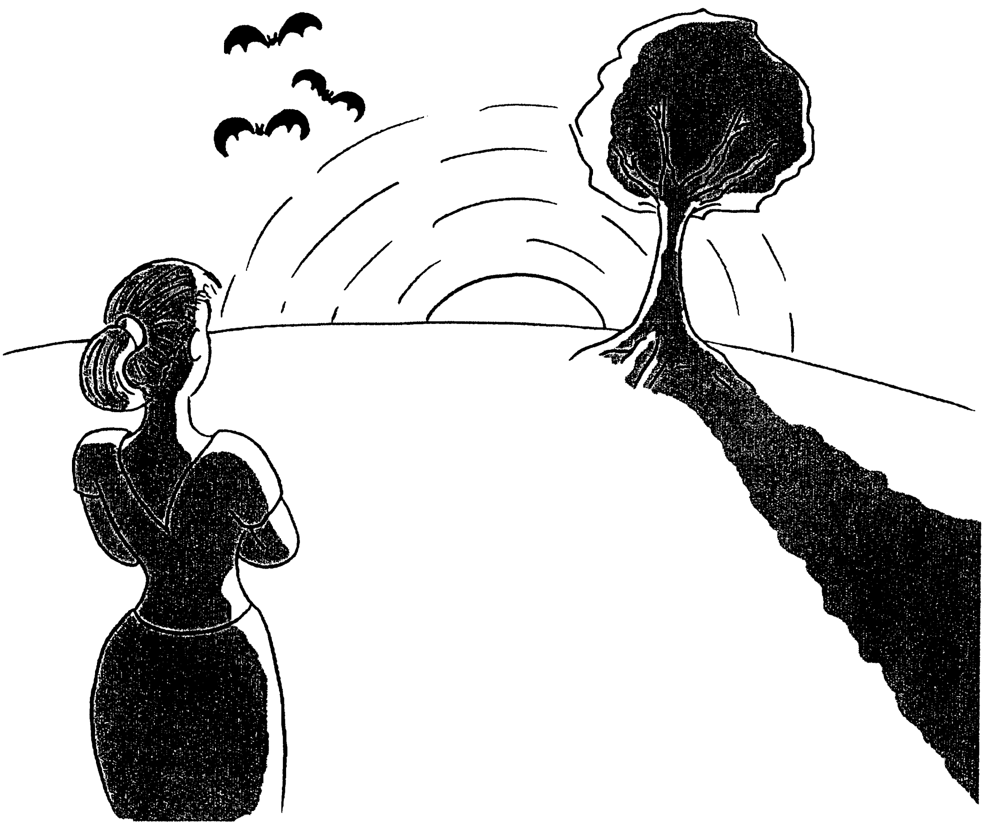
Notions de trigonométrie sphérique et exemples d'utilisation

Catherine Philippe

UNIVERSITÉ DE ROUEN
Faculté des Sciences
et des Techniques

Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des
Mathématiques

Notions de trigonométrie sphérique et exemples d'utilisation



Catherine Philippe

Introduction

Je me souviens d'un été, où, chaque soir, avant de scruter la sortie des chauves-souris qui avaient envahi le grenier, je contemplais le coucher du soleil sur l'horizon. Je découvris que le soleil ne disparaissait pas exactement au même endroit chaque soir. Jusqu'alors, je savais que le soleil se couche à l'Ouest, alors qu'en réalité le soleil se couche vers l'Ouest. Cet été-là j'ai pris conscience de ce que les astronomes appellent l'amplitude du soleil, qui mesure précisément cet écart entre le lieu du coucher du soleil sur l'horizon, et l'Ouest. Cette donnée astronomique peut chaque jour être mesurée. Elle peut aussi être calculée en utilisant la trigonométrie sphérique.

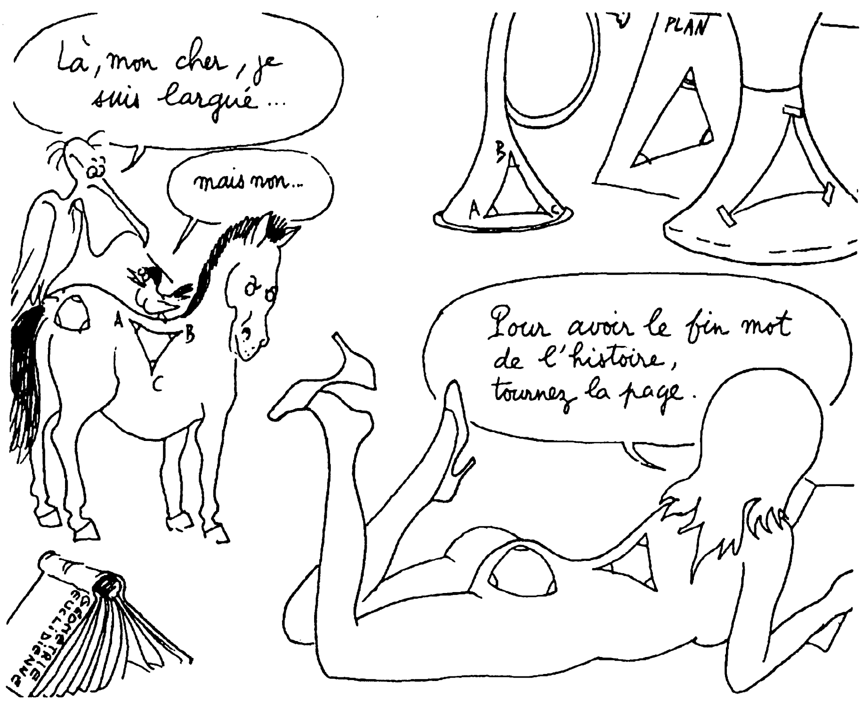
La trigonométrie sphérique n'est plus enseignée, pas plus que l'astronomie. Elle l'a été. On peut regretter qu'elle ne le soit plus, à une époque où l'on envoie des satellites dans l'espace, et où l'on dispose de logiciels de géométrie performants qui facilitent la vue dans l'espace. L'objet de cette brochure est de donner les connaissances de base en trigonométrie sphérique.

Points, droites, segments, triangles, cercles sont des objets familiers de la géométrie plane. Euclide les a définis, et on connaît de nombreux théorèmes qui les concernent. Ces théorèmes démontrés en s'appuyant sur quelques axiomes, sont ceux de la géométrie euclidienne... Ainsi dans un plan, le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite. Dans un triangle plan, chaque angle a une mesure inférieure à 180° ; la somme des angles est égale à un angle plat[1]. Les formules classiques $\frac{\sin\hat{A}}{BC}=\frac{\sin\hat{B}}{CA}=\frac{\sin\hat{C}}{AB}$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\hat{A}$ permettent la résolution des triangles plans, c'est à dire permettent de trouver les angles et côtés d'un triangle dès lors qu'on connaît un angle et deux côtés. Enfin, il est possible de se repérer dans un plan grâce à deux coordonnées cartésiennes (ou polaires).

Sur une sphère, on se repère tout aussi facilement grâce à deux angles (latitude et longitude). En ce sens, plan et sphère sont considérés comme des surfaces de dimension 2. En revanche sur une sphère les chemins les plus courts sont des grands cercles. Les « droites » d'une sphère sont donc les cercles de centre le centre

[1] Cette propriété caractérise les surfaces qui comme le plan sont dites à courbure nulle. Si l'on trace un triangle sur un cylindre, ou sur un cône, surface dont on peut réaliser un patron plan, la somme de ses angles mesure encore 180°.

de la sphère. Les « triangles » d'une sphère sont des triangles sphériques. Si on chemine « en ligne droite » sur une sphère, on revient à son point de départ... Il y a là de quoi perdre la boule comme aurait dit Raymond Devos. Par deux points diamétralement opposés de la sphère, il passe une infinité de « droites » et l'un des axiomes de la géométrie euclidienne n'est pas vérifié. La géométrie sphérique n'est pas euclidienne. Sur une sphère, la notion de « droites parallèles » n'existe pas puisque deux « droites » (c'est à dire deux grands cercles) se coupent toujours. Qui plus est, la somme des angles d'un triangle sphérique n'est plus une constante et dépasse toujours un angle plat. Ce résultat déstabilisant caractérise les surfaces qui comme la sphère ont une courbure positive. Il existe aussi des surfaces sur lesquelles la somme des angles d'un triangle est inférieure à un angle plat ; ce sont les surfaces à courbure négative, comme la « selle de cheval ».



Les triangles sphériques de ce dessin emprunté au *Géométricon* de Jean-Pierre Petit apparaissent sur les fesses des protagonistes...

La trigonométrie sphérique s'est développée pour répondre à des besoins. Quand le navigateur a voulu conquérir le monde et traverser les océans, il a dû apprendre à se repérer. La Terre est sensiblement sphérique. La voûte céleste est représentée comme une demi-sphère. Qu'il s'agisse de relier deux points du monde par voie maritime, ou de repérer sa position sur Terre en utilisant des étoiles dans le ciel, le problème se règle par la trigonométrie sphérique.

Dans les chapitres qui vont suivre, on définira et on étudiera les triangles sphériques. Puis on établira les formules usuelles de trigonométrie sphérique. Les deux premiers chapitres sont accessibles à un élève de Première S, et peuvent être utilisés pour des TPE. Enfin on abordera la trigonométrie sphérique sous un aspect plus historique, et on verra comment était enseignée la trigonométrie sphérique par

Simon Stevin. On présentera quelques-unes de ses démonstrations. Enfin dans le dernier chapitre on verra comment la trigonométrie intervient en navigation, et on examinera quelques exemples « historiques ». Un formulaire de trigonométrie sphérique récapitulant toutes les formules vues dans le second chapitre est donné en annexe.

Triangles sphériques

Volontairement, ce chapitre, ainsi que le chapitre suivant, prend la forme d'un cours. Il doit permettre au lecteur n'ayant pas de formation en trigonométrie sphérique de se familiariser avec ces notions, avant d'aborder les aspects historiques. La démarche adoptée ici est celle de la fin du XIXe siècle. Les Leçons de Géométrie élémentaire de Jacques Hadamard (1901) m'ont été utiles.

Intersection d'une sphère et d'un plan

Étude géométrique

P est un plan de l'espace E.
S est la sphère de centre O et de rayon r ; $S = \{M \in E \, ; \, OM = r\}$.

> **Proposition 1**
> Si P contient O, $P \cap S$ est un cercle de centre O de rayon r appelé *grand cercle* de la sphère S.

En effet, les points de $P \cap S$ sont les points M de P qui vérifient $OM = r$; ce sont exactement les points du cercle de centre O de rayon r de P.
$P \cap S$ est donc le cercle de centre O et de rayon r.

> **Proposition 2**
> Si P ne contient pas O, $P \cap S$ est soit un cercle de rayon strictement inférieur à r appelé *petit cercle* de la sphère S, soit réduit à un point, soit vide.

La démonstration est simple, prenons le temps de la formaliser.

Soit D la droite passant par O et perpendiculaire à P en K. Pour tout point M de P, le triangle MKO est rectangle en K.
On a alors $OM^2 = OK^2 + KM^2$.

Si, comme ci-contre, $OK > r$, alors pour tout point M de P on a $OM > r$ et le plan et la sphère n'ont aucun point commun.

Si $OK = r$ alors pour tout point M de P autre que K on a $OM > r$ et le plan et la sphère ont pour seul point commun le point K ; ils sont tangents en K.

Si $OK < r$, le plan et la sphère se coupent et les points de $P \cap S$ sont les points M de P qui vérifient $OM = r$; ces points M vérifient donc

$$KM = \sqrt{r^2 - OK^2} .$$

Ce sont les points du cercle de centre K de rayon

$$r' = \sqrt{r^2 - OK^2} \text{ ; et } r' \leqslant r.$$

Enfin, si P passe par O, c'est à dire si $K = O$ alors le cercle intersection de P et S a pour centre O et rayon r ; c'est le plus grand cercle qu'on puisse considérer.

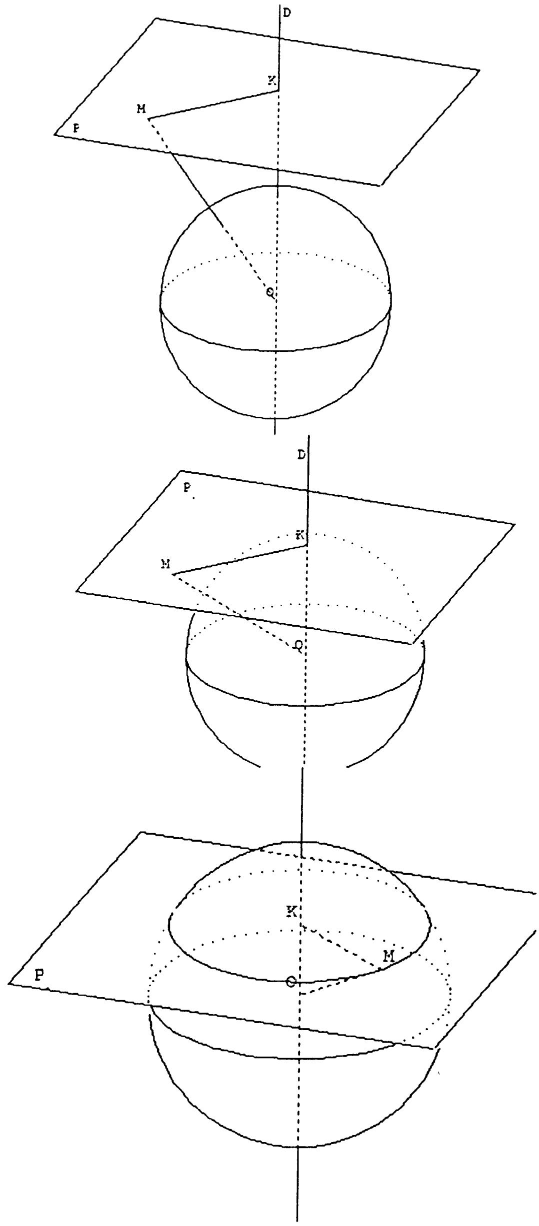


FIG 1 : Intersection d'un plan et d'une sphère

Grands cercles d'une sphère

Proposition 3
Étant donnés deux points A et B de la sphère S de centre O et de rayon r, ou bien A, O et B sont alignés (c'est à dire A et B sont diamétralement opposés) et dans ce cas il existe une infinité de grands cercles contenant A et B ; ou bien A, O et B ne sont pas sont alignés et dans ce cas il existe un et seul grand cercle contenant A et B.

En effet, les grands cercles contenant A et B sont par définition les intersections de S et de plans contenant O, A et B... d'où le résultat.

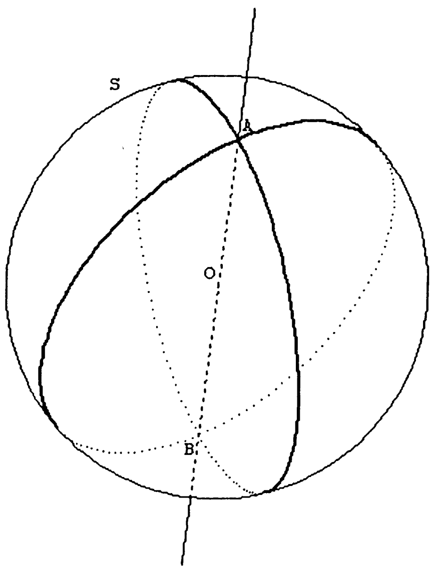


FIG 2 : Grands cercles de diamètre $[AB]$

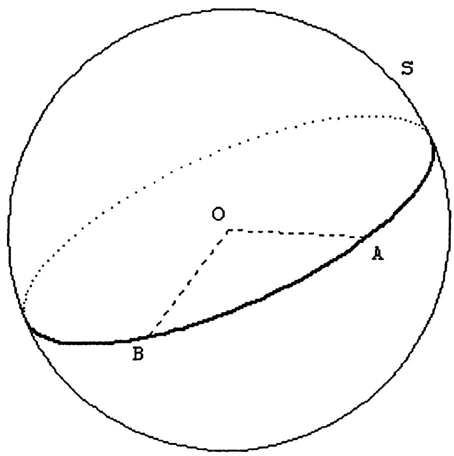


FIG 3 : Un seul grand cercle contient A et B non diamétralement opposés

Pôles d'un grand cercle d'une sphère

Étant donnés un grand cercle C d'une sphère S et P le plan de ce cercle C, on appelle *pôles* de C les deux points de S diamétralement opposés obtenus comme intersection de S et de la droite perpendiculaire à P passant par le centre de la sphère. La droite joignant ces pôles est l'*axe polaire* du grand cercle.
On peut, de la même façon, définir les pôles et l'axe polaire d'un petit cercle de la sphère.

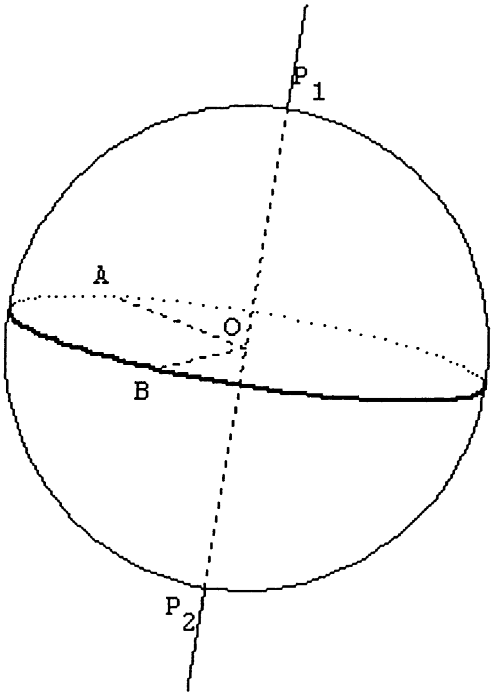


FIG 4 : L'axe polaire (P_1P_2) du grand cercle contenant A et B

Exemples

1) Si on assimile la Terre à une sphère, l'équateur est un grand cercle dont les deux pôles sont le pôle Nord et le pôle Sud ; les méridiens sont des demi-grands cercles ; les parallèles autres que l'équateur sont des petits cercles.

2) La sphère céleste représentée par la sphère armillaire est constituée de plusieurs grands cercles : l'équateur céleste a même axe polaire que l'équateur terrestre ; l'horizon lié à l'observateur terrestre a pour pôle le zénith de l'observateur ; l'écliptique est le grand cercle qui représente le trajet apparent du soleil pendant une année...

3) Les routes maritimes les plus courtes reliant deux points donnés sont celles qui suivent un grand cercle. Mais ce ne sont pas les plus aisées à suivre sur mer...
Lorsqu'on navigue en gardant un cap constant, c'est-à-dire en conservant toujours le même angle avec les méridiens terrestres, la courbe décrite par le bateau s'appelle une loxodromie et ce n'est pas un arc de grand cercle.

Les chemins les plus courts

Proposition 4
L'arc de grand cercle joignant deux points A et B de la sphère S est le plus court chemin, en terme de distance joignant A et B.

On peut dans un premier temps constater que parmi tous les arcs de cercles possibles qui relient A et B sur la sphère, le grand cercle est celui qui réalise le plus court chemin, tandis que le plus petit cercle, de diamètre AB, est celui qui réalise le plus long chemin.

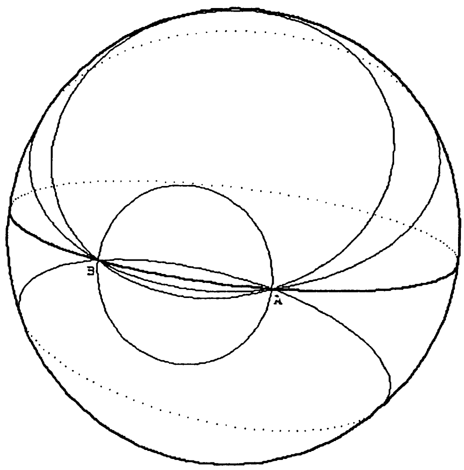
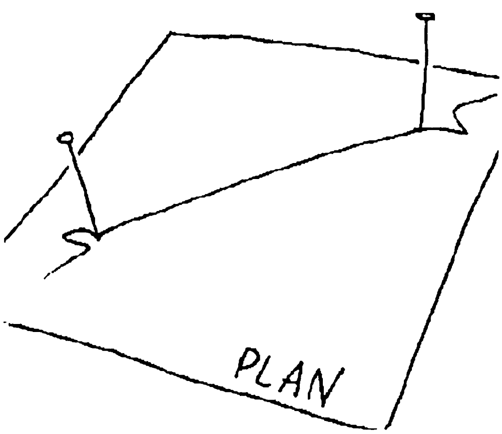
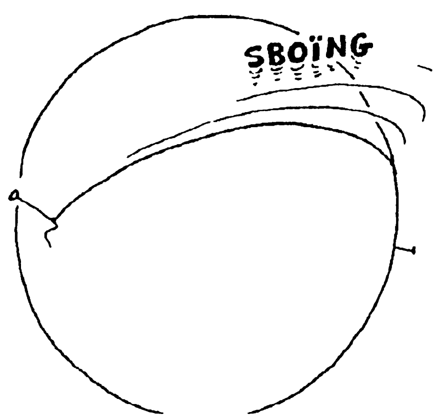


FIG 5 : Exemples de chemins circulaires reliant A à B, dont celui de diamètre $[AB]$

Cependant le résultat énoncé par la proposition 4 est beaucoup plus général. Il est dit que parmi tous les chemins (continus) possibles reliant A et B, l'arc de grand cercle est le plus court possible. Cette proposition peut être abordée de plusieurs façons. Nous proposons une démonstration basée sur la géométrie élémentaire.





Démonstration *(dont la lecture n'est pas indispensable pour la suite)*
On va montrer que tout point C de l'arc de grand cercle qui joint A et B sur la sphère est un point du plus court chemin qui relie A à B.
Sur la FIG 6 ci-après on a représenté les points A et B, le grand cercle AB, un point C de l'arc $\widehat{AB}$ de ce grand cercle, les petits cercles C_1 et C_2 passant par C, d'axes polaires (OA) et (OB), et de centres respectifs K et L.

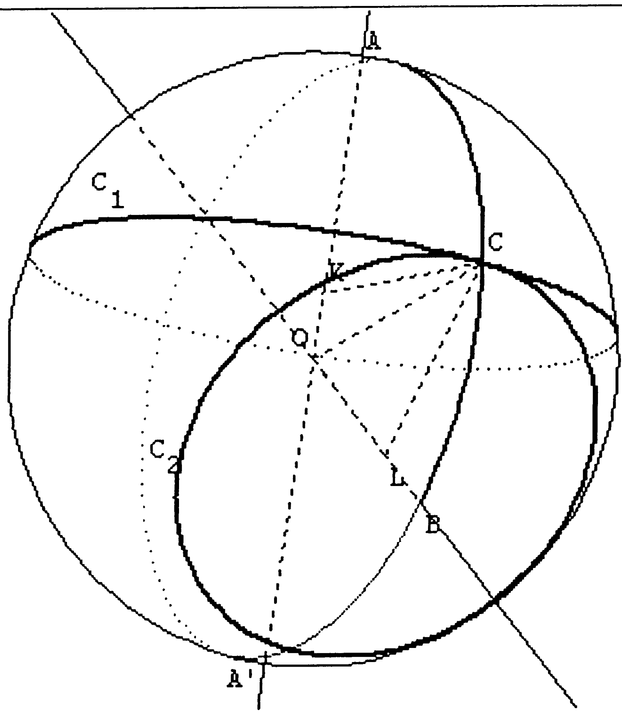


FIG 6 : Le grand cercle AB et les deux petits cercles C_1 et C_2

Le grand cercle AB a pour diamètre [AA'] perpendiculaire au plan du petit cercle C_1 de centre K. Les plans du grand cercle et du petit cercle sont donc perpendiculaires et ont pour intersection la droite (KC).
La tangente T_1 en C au petit cercle C_1 est perpendiculaire au rayon [KC], c'est à dire à l'intersection des deux plans des grand et petit cercles. Elle est contenue dans l'un elle est donc perpendiculaire à l'autre. Elle est donc perpendiculaire en C au plan du grand cercle, et dans ce plan, elle est perpendiculaire à la tangente T en C au grand cercle.
Par un raisonnement analogue, la tangente T_2 au petit cercle C_2 de centre L et d'axe polaire (OB) est perpendiculaire au plan du grand cercle, et dans ce plan, elle est perpendiculaire à T en C.
Si bien que $T_1 = T_2$ et les deux petits cercles C_1 et C_2 sont tangents en C comme on le voit sur la figure. Chacun d'eux est perpendiculaire au grand cercle qui le traverse.

Imaginons à présent un chemin continu sur la sphère qui joint A à B ; ce chemin traverse le petit cercle C_1 en D et le petit cercle C_2 en E ; la longueur de ce chemin est égale à la somme des longueurs des chemins de A à D puis de D à E puis de E à B.
Minimiser la longueur du chemin de A à D revient à considérer un chemin de longueur minimal reliant A (le pôle) à D (le point du petit cercle). Mais pour des raisons de symétrie, les plus courts chemins d'un pôle aux différents points d'un cercle ayant ce pôle sont égaux entre eux. Le chemin le plus court de A à D a donc la même longueur que celui de A à C.
De la même façon, le chemin le plus court de B à E a la même longueur que celui de B à C.

Minimiser la longueur du chemin de D à E équivaut à faire passer le chemin par C.
Le chemin le plus court pour joindre A à B est donc celui pour lequel $D = E = C$.
Le chemin le plus court pour joindre A à B passe donc par tous les points C de l'arc de grand cercle $\overset{\frown}{AB}$, c'est donc l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lui-même.

Triangles sphériques

Définition

Un *triangle sphérique ABC* est la figure obtenue en joignant trois points A, B, et C deux à deux distincts, d'une sphère S, par trois arcs de grands cercles $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, de longueur inférieure à un demi-grand cercle (c'est à dire πr). A, B, et C sont les sommets du triangle sphérique.

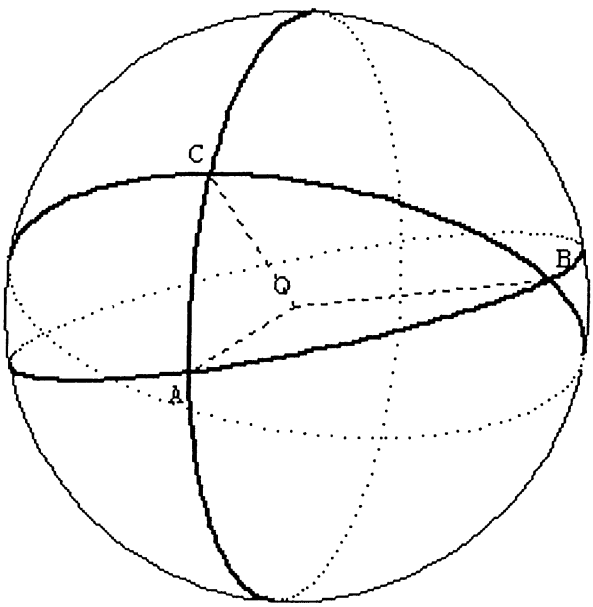


FIG 7 : Le triangle sphérique ABC

Dans la définition même d'un triangle sphérique, on impose que les sommets soient reliés par des arcs de grands cercles inférieurs (ou égaux, dans certains cas) à un demi grand cercle. Si on abandonne cette contrainte, à tout ensemble de trois points d'une sphère, on pourrait associer six triangles. Le plus petit est le triangle sphérique tel qu'on l'a conçu ici, les autres sont des « cas pathologiques » dont le plus grand serait son complément sur la sphère.

Exemple

J et J' sont deux points diamétralement opposés d'une sphère ; on considère un grand cercle de diamètre JJ' ; I est le milieu du demi-grand cercle $\overset{\frown}{JJ'}$; M est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$; K est un des pôles du grand cercle IJ ; N est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{KJ}$.
IJK ; KJJ' ; IKM ; MJN sont des triangles sphériques.

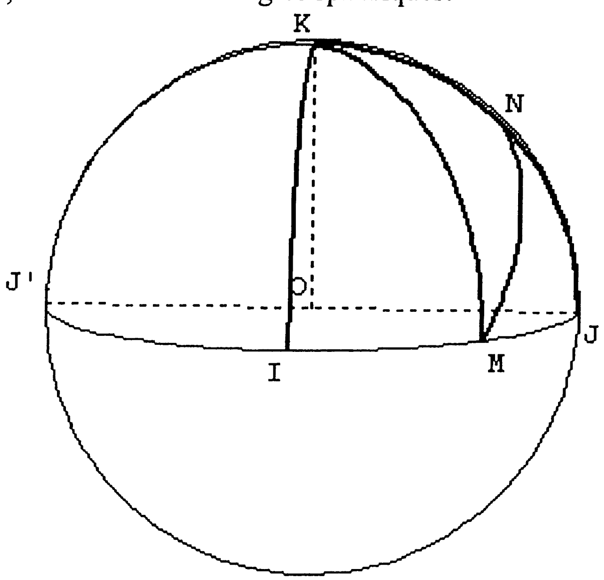


FIG 8 : Les triangles sphériques de l'exemple

Autres cas pathologiques

Si les trois sommets sont situés sur le même grand cercle, le triangle est ou bien plat, ou bien la demi-sphère entière limitée par ce grand cercle.

Si deux sommets consécutifs sont diamétralement opposés, par exemple A et B , le troisième sommet C est situé sur un demi grand cercle d'extrémités A et B et le triangle sphérique est un *fuseau*, c'est-à-dire une portion de sphère limitée par deux demi grands cercles de mêmes extrémités.

Dans la suite on s'intéressera de préférence aux « vrais » triangles sphériques ABC, non plats, pour lesquels les trois arcs de cercle $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ sont strictement inférieurs à un demi-grand cercle. De tels triangles sphériques sont strictement contenus dans une demi-sphère.

Côtés et angles d'un triangle sphérique

Les *côtés* du triangle sphérique ABC construit sur la sphère de centre O et de rayon r sont les mesures des trois angles au centre $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, $\widehat{AOB}$; on note traditionnellement a, b, c ces trois mesures ; elles sont proportionnelles aux trois longueurs des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{AB}$.

Les *angles* du triangle sphérique ABC construit sur la sphère de centre O et de rayon r sont les mesures des trois angles que font entre eux chacun des trois plans des trois grands cercles supports des « côtés » du triangle ; on les note traditionnellement $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Un angle peut être perçu de plusieurs manières :

$\widehat{A}$ est l'angle dièdre que font entre eux les plans (AOB) et (AOC) ;

$\widehat{A} = \widehat{tAt'}$ où $[At)$ et $[At')$ sont les demi-tangentes en A aux grands cercles AB et AC, incluses dans le plan tangent à la sphère qui passe par A ; on peut mesurer $\widehat{A}$ avec un rapporteur placé tangentiellement à la sphère en A ;

$\widehat{A} = \widehat{uOu'}$ où $[Ou)$ et $[Ou')$ sont parallèles à $[At)$ et $[At')$, et incluses dans le plan passant par O et perpendiculaire à (OA).

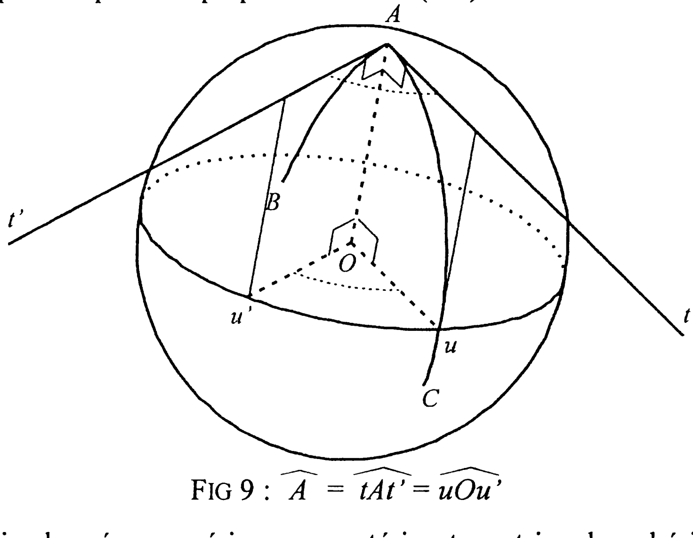


FIG 9 : $\widehat{A} = \widehat{tAt'} = \widehat{uOu'}$

Ainsi six données numériques caractérisent un triangle sphérique ABC ; ce sont les six mesures d'angles notées dans le tableau ci-dessous. Ces mesures sont faites en degrés jusqu'au XIX^e siècle. Sauf mention contraire, on utilisera comme unité de mesure le degré.

côtés	***a***	***b***	***c***
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$

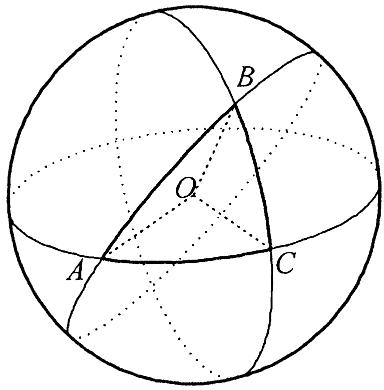


FIG 10 : Les angles et les côtés du triangle sphérique *ABC*

Remarques

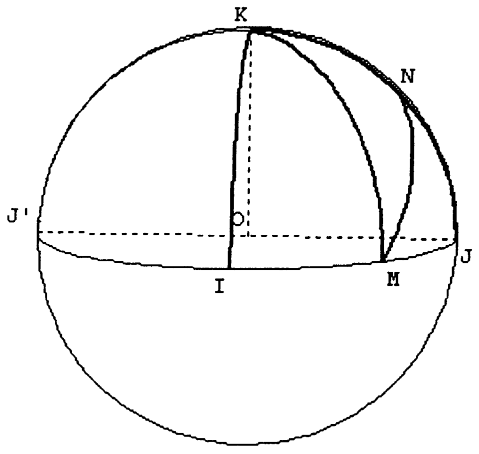
1) Si les trois côtés a, b, c sont éléments de]0° ; 180°[alors le triangle sphérique est un « vrai » triangle non « pathologique ».

2) Si l'un des trois côtés vaut 180°, par exemple a, alors le triangle sphérique est un fuseau limité par deux demi grands cercles d'extrémités B et C et alors $\widehat{A} = 180°$.

3) Il ne peut pas y avoir deux côtés consécutifs par exemple a et b de mesure 180°, car sinon on aurait $B = A$ ce qui contredit la définition d'un triangle sphérique.

Exercice

Reprendre l'exemple des triangles sphériques *IJK, KJJ', IKM* et *MJN* (FIG 8) et évaluer si possible angles et côtés de chacun d'eux.



Les trois angles et les trois côtés de *IJK* valent 90°. Dans ce triangle la somme des trois angles et la somme des trois côtés mesurent 270°.

KJJ' est un fuseau. Le côté $\overset{\frown}{JJ'}$ et l'angle de sommet *K* mesurent 180°. Les deux autres angles et les deux autres côtés mesurent 90°.

Dans le triangle *IKM*, les angles de sommets *I* et *M* ainsi que leurs côtés opposés mesurent 90°. L'angle de sommet *K* et son côté opposé mesurent 45°.

Enfin dans *MJN*, l'angle de sommet *J* est droit, mais pas son côté opposé. Les côtés $\overset{\frown}{JN}$ et $\overset{\frown}{JM}$ mesurent 45°. Les angles de sommet *N* et *M* sont égaux mais on ne peut évaluer leur mesure. On verra comment obtenir les mesures manquantes au chapitre suivant.

Triangle sphérique polaire d'un triangle sphérique

Remarque préliminaire

Si *P* est un des pôles d'un grand cercle partageant la sphère en deux demi-sphères ou hémisphères, tout point *A* situé dans le même hémisphère que *P* est tel que l'arc de grand cercle $\overset{\frown}{PA}$ mesure moins d'un quart de grand-cercle. Et tout point *B* situé dans l'autre hémisphère est tel que $\overset{\frown}{PB}$ mesure plus qu'un quart de grand cercle. Il suffit d'observer la FIG 11 ci-dessous. Les points de l'hémisphère « Nord » sont à moins d'un quart de grand cercle du Pôle Nord et ceux de l'hémisphère « Sud » sont à plus d'un quart de grand cercle du Pôle Nord.

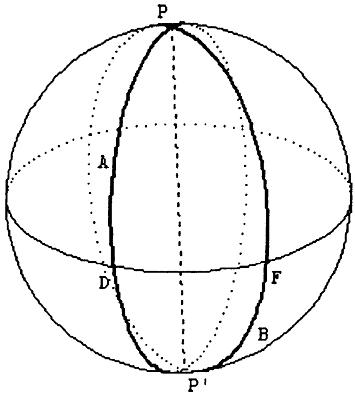


FIG 11 : Les deux hémisphères

Construction du triangle polaire d'un triangle sphérique

Etant donné un triangle sphérique ABC construit sur une sphère de centre O, on construit les trois axes polaires de chacun des grands cercles supports des côtés du triangle. Chacun d'eux coupe la sphère en deux points diamétralement opposés ; on adopte les notations suivantes :

(C_1C_2) est l'axe polaire du grand cercle AB et coupe la sphère en C_1 et C_2 ;
C_1 est le point de cet axe situé dans l'hémisphère limité par le grand cercle AB et contenant C.
(B_1B_2) est l'axe polaire du grand cercle AC et coupe la sphère en B_1 et B_2 ;
B_1 est le point de cet axe situé dans l'hémisphère limité par le grand cercle AC et contenant B.
(A_1A_2) est l'axe polaire du grand cercle BC et coupe la sphère en A_1 et A_2 ;
A_1 est le point de cet axe situé dans l'hémisphère limité par le grand cercle BC et contenant A.

B_1, B_2, C_1, C_2 sont donc situés dans le plan perpendiculaire à (OA) et sur la sphère : ils sont donc sur un grand cercle, d'axe polaire (OA) comme le montre la FIG 12 ci après.

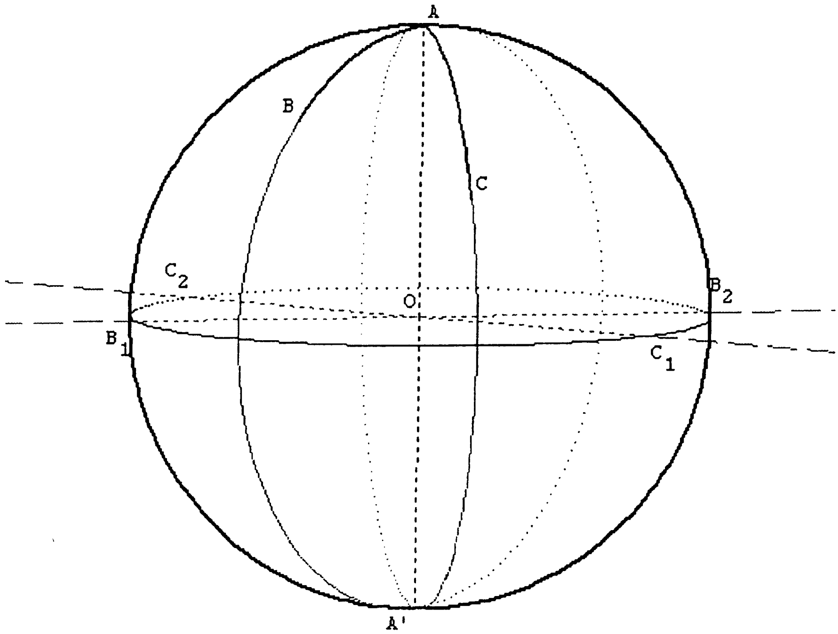


FIG 12 : Les axes polaires (B_1B_2) et (C_1C_2) des grands cercles AC et AB

De la même façon, les points C_1, C_2, A_1, A_2 sont situés dans le plan perpendiculaire à (OB) et sur la sphère et ils sont donc sur un grand cercle, d'axe polaire (OB).
Les points A_1, A_2, B_1, B_2 sont situés dans le plan perpendiculaire à (OC) et sur la sphère : ils sont donc sur un grand cercle, d'axe polaire (OC).
Chacun des arcs $\overset{\frown}{AC_1}$, $\overset{\frown}{AC_2}$, $\overset{\frown}{AB_1}$ et $\overset{\frown}{AB_2}$ mesure un quart de grand-cercle c'est à dire $\frac{\pi}{2}\times r$.

Selon le résultat préliminaire, l'arc $\overset{\frown}{BB_1}$ mesure moins d'un quart de grand-cercle car le point B_1 est dans le même hémisphère, limité par le grand cercle $\overset{\frown}{AC}$, que B. En revanche l'arc $\overset{\frown}{BB_2}$ mesure plus qu'un quart de grand cercle.
De même les arcs $\overset{\frown}{CC_1}$ et $\overset{\frown}{AA_1}$ mesurent moins d'un quart de grand-cercle, contrairement aux arcs $\overset{\frown}{CC_2}$ et $\overset{\frown}{AA_2}$.

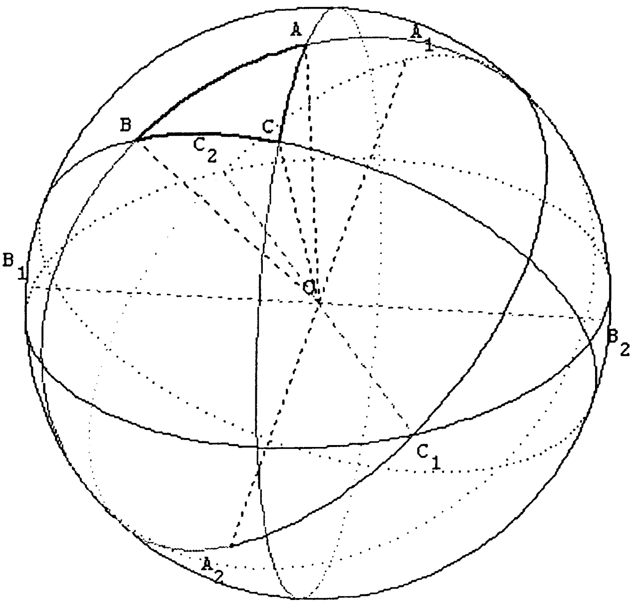


FIG 13: Le triangle sphérique ABC et les pôles A_i et B_i[2]

Définition

Le triangle sphérique $A_1B_1C_1$ construit selon le protocole décrit ci-dessus, est appelé *triangle sphérique polaire* du triangle sphérique ABC. On visualise les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sur la FIG 14 ci-après :

[2] Pour gagner en lisibilité cette figure est reproduite en couleur en fin d'ouvrage : on associe à un côté et son axe polaire la même couleur.

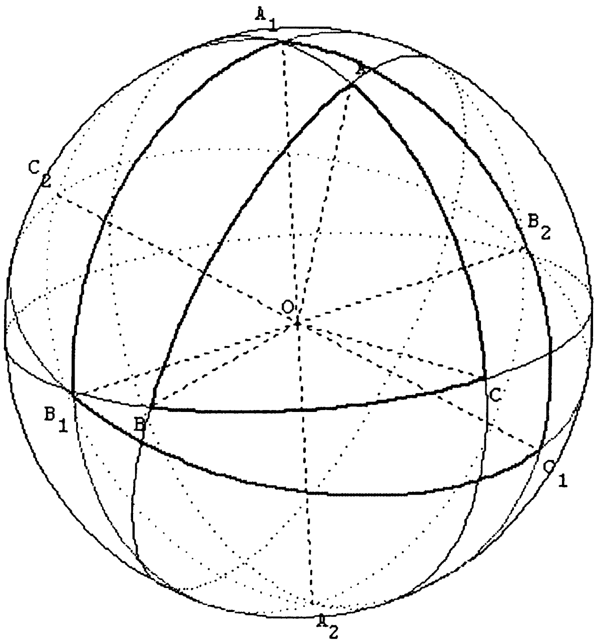
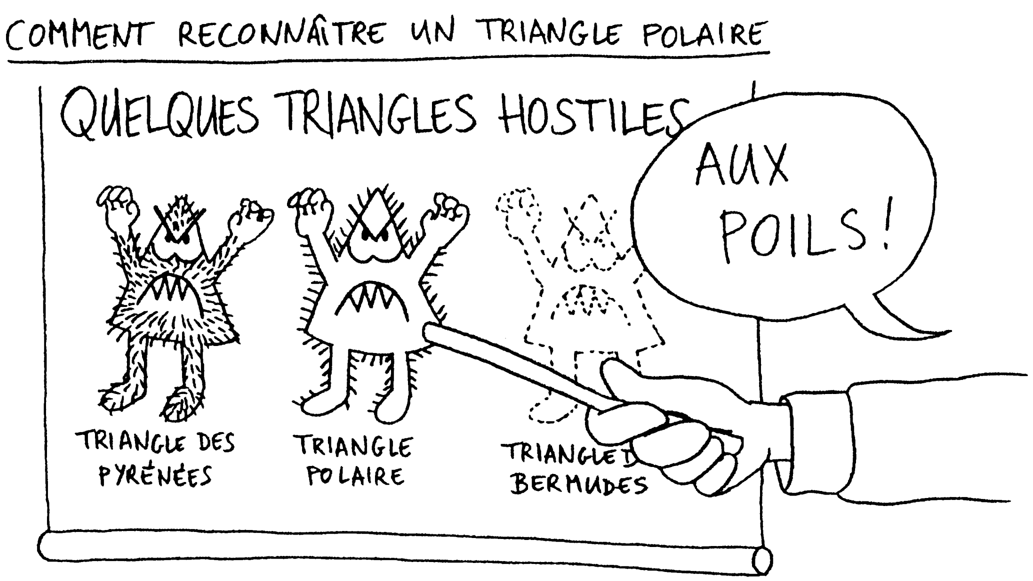


FIG 14: Le triangle sphérique ABC et son triangle sphérique polaire associé $A_1B_1C_1$[3]



Exercice
Reprendre l'exemple étudié précédemment (FIG 8) et s'assurer que le triangle sphérique $J_1M_1N_1$ est le triangle polaire de JMN, puis vérifier que le triangle sphérique polaire de $J_1M_1N_1$ est JMN.

[3] Pour plus de lisibilité le triangle sphérique ABC peut être dessiné en bleu et son polaire $A_1B_1C_1$ en rouge

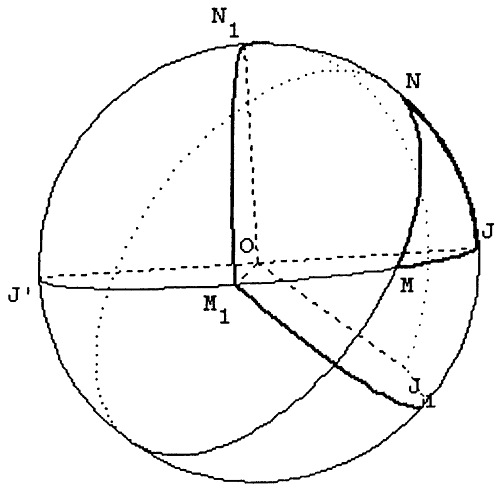


FIG 15 : Le triangle sphérique *MNJ* et son polaire

Les correspondances entre un triangle sphérique et son triangle polaire associé

Proposition 5
ABC un triangle sphérique et $A_1B_1C_1$ son triangle polaire associé.
a) Le triangle polaire associé au triangle sphérique $A_1B_1C_1$ est ABC.
b) Les angles de l'un et les côtés de l'autre sont supplémentaires.
Cet important résultat fournit les six égalités suivantes :

$a_1 + \widehat{A} = 180°$ $\qquad a + \widehat{A_1} = 180°$

$b_1 + \widehat{B} = 180°$ $\qquad b + \widehat{B_1} = 180°$

$c_1 + \widehat{C} = 180°$ $\qquad c + \widehat{C_1} = 180°$

Démonstration

a) Montrons d'abord que le triangle polaire de $A_1B_1C_1$ est le triangle ABC.
Tout d'abord, $A_1B_1C_1$ est un triangle sphérique.
(OA), (OB), (OC) sont les axes polaires des côtés du triangle sphérique $A_1B_1C_1$.
Il reste à voir que A (respectivement B, C) est situé dans la même demi-sphère limitée par le grand cercle B_1C_1 (respectivement A_1C_1, A_1B_1) que A_1 (respectivement B_1, C_1) ; or on sait que l'arc $\widehat{AA_1}$ (respectivement $\widehat{BB_1}$, $\widehat{CC_1}$) mesure moins d'un quart de grand cercle. En vertu du résultat préliminaire, on en déduit le résultat.
On a donc :

triangle sphérique ABC				triangle sphérique $A_1B_1C_1$			
côtés	a	b	c	Côtés	a_1	b_1	c_1
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	Angles	$\widehat{A}_1$	$\widehat{B}_1$	$\widehat{C}_1$

b) Démontrons la première égalité : $a_1 + \widehat{A} = 180°$.
Pour cela reprenons la FIG 12 donnée ci-dessus ; construisons les tangentes de l'angle $\widehat{A}$ du triangle sphérique ; et observons la section de la sphère avec le plan (OB_1C_1) ; cela nous donne les FIG 16 et 17 ci-après.

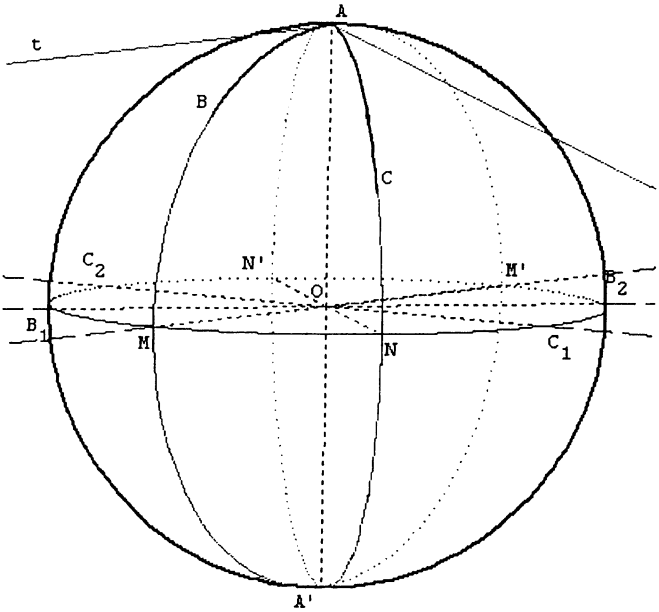


FIG 16 : Les grands cercles AB et AC, leurs axes polaires et leurs demi-tangentes

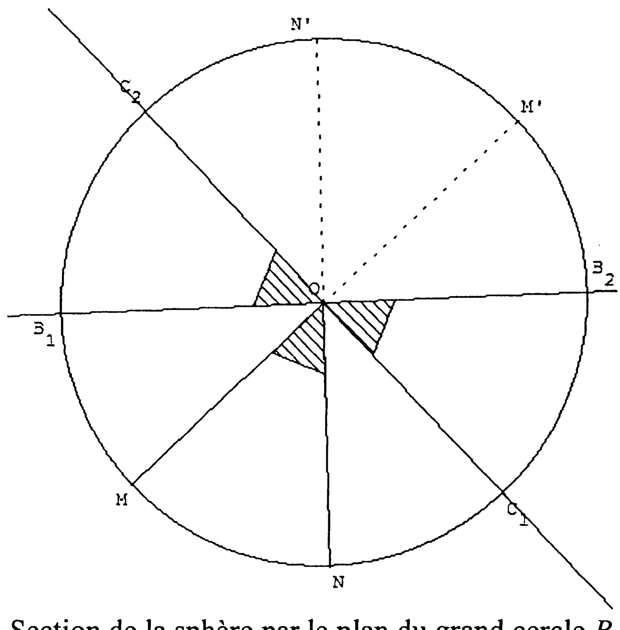


FIG 17 : Section de la sphère par le plan du grand cercle $B_1B_2C_1C_2$

M (respectivement N) est une intersection du grand cercle AB (respectivement du grand cercle AC) avec le plan (OB_1C_1).
Comme (B_1B_2) est perpendiculaire à (OAC), on a $(B_1B_2) \perp (ON)$

Comme (C_1C_2) est perpendiculaire à (OAB), on a $(C_1C_2) \perp (OM)$
Dans le triangle sphérique ABC, $\widehat{A} = \widehat{tAt'} = \widehat{MON} = \widehat{C_1OB_2} = \widehat{B_1OC_2}$
Dans le triangle sphérique $A_1B_1C_1$, $a_1 = \widehat{B_1OC_1}$
Et donc : $a_1 + \widehat{A} = \widehat{B_1OC_1} + \widehat{MON} = \widehat{B_1OC_1} + \widehat{B_1OC_2} = 180°$
Ce qu'il fallait démontrer.
Par permutation on obtient les deux égalités suivantes.
En échangeant les rôles des deux triangles sphériques ABC et $A_1B_1C_1$, polaires l'un de l'autre, on obtient les trois dernières égalités.

Propriétés des triangles sphériques

Inégalité triangulaire

Proposition 6
Dans un triangle sphérique, tout côté est inférieur ou égal à la somme des deux autres.

Démonstration
Le plus court chemin du point A au point C sur la sphère est l'arc de grand cercle $\overset{\frown}{AC}$, si bien que $\overset{\frown}{AC} \leq \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$. Ceci démontre la proposition. On peut donner cependant une démonstration élémentaire de la proposition 6, qui n'utilise pas le fait qu'un arc de grand cercle réalise le plus court chemin entre deux points d'un sphère.
On considère un triangle sphérique ABC dont les trois côtés sont strictement inférieurs à un demi grand cercle. On va démontrer que $b \leqslant a + c$. Et pour cela on va utiliser des résultats de géométrie plane, en construisant des triangles plans dont deux angles coïncident avec $b - a$ et c.

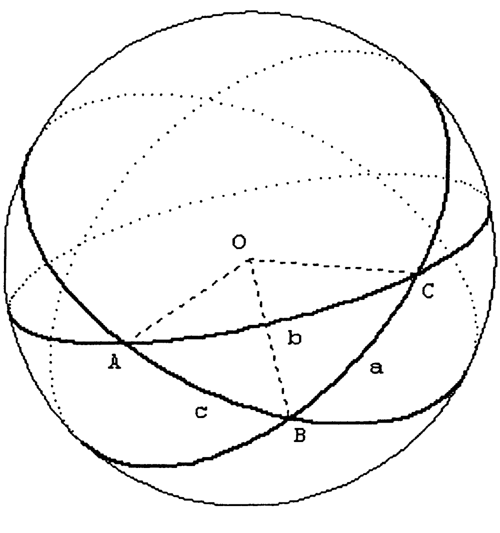


FIG 18 : Le triangle sphérique ABC avec $b > a$

Si on a l'inégalité $b \leqslant a$ alors on a évidemment a fortiori $b \leqslant a + c$.

Supposons donc que $b > a$ c'est-à-dire $\widehat{AOC} > \widehat{BOC}$.
On construit le point D sur $[AC]$ de sorte que $\widehat{COD} = a = \widehat{BOC}$.
On construit le tétraèdre $OAB'C$ où le point B' est le point de $[OB)$ vérifiant $OD = OB'$.

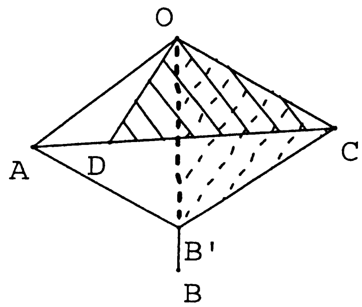


FIG 19 : Le tétraèdre $OAB'C$

Les triangles plans ODC et $OB'C$ hachurés sur la figure ci-dessus sont égaux car $OD = OB'$ et $\widehat{B'OC} = \widehat{DOC}$. Donc $CB' = CD$.
$AD = AC - CD = AC - CB' \leqslant AB'$ (d'après l'inégalité triangulaire dans le triangle plan ACB').
$[AD]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{AOD} = b - a$ du triangle plan AOD et $[AB']$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{AOB'} = \widehat{AOB} = c$ du triangle plan AOB'.
Les deux triangles AOD et AOB' ont deux côtés égaux deux à deux ($OA = OA$ et $OD = OB'$) et $AD \leqslant AB'$. On en déduit donc $\widehat{AOD} \leqslant \widehat{AOB'}$ c'est-à-dire $b - a \leqslant c$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 7
Dans un triangle sphérique, tout angle est supérieur à la somme des deux autres moins un angle plat.

Il suffit d'appliquer la proposition 6 au triangle sphérique polaire associé à ABC.

Aire d'un triangle sphérique

Proposition 8
L'aire d'un triangle sphérique ABC construit sur la sphère de centre O et de rayon r est égale à $r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$, les angles du triangle étant mesurés en radians.

On en déduit que la somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à 180°.

Démonstration
Rappelons que l'aire de la sphère vaut $4\pi r^2$; l'aire de la demi-sphère vaut donc $2\pi r^2$; l'aire d'un fuseau, c'est à dire l'aire de la portion de sphère limitée par deux

demi grands cercles de mêmes extrémités A et A' diamétralement opposées et formant entre eux un angle égal à $\widehat{A}$ vaut $4\pi r^2 \times \frac{\hat{A}}{2\pi} = 2r^2\,\widehat{A}$ ($\widehat{A}$ étant exprimé en radian)

La proposition est donc démontrée dans le cas où le triangle sphérique est « pathologique » et assimilable à un fuseau : deux de ces angles sont égaux et le troisième est plat.

Soit à présent un « vrai » triangle sphérique ABC ; A', B' et C' les points de la sphère diamétralement opposés à A, B et C.

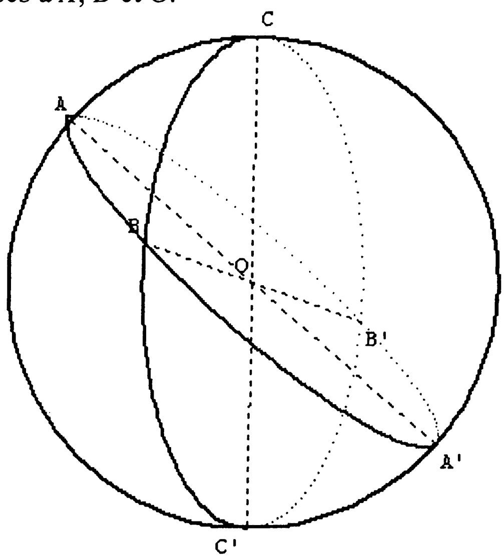


FIG 20 : La demi-sphère visible se décompose comme un puzzle

La demi-sphère limitée par le grand cercle $ACA'C'$ et contenant B se décompose en

le fuseau d'angle $\widehat{A}$, limité par les méridiens ABA' et ACA',
le triangle sphérique ABC',
le triangle sphérique $BA'C'$.

On en déduit, en considérant les aires :

aire de la demi-sphère $= 2r^2\pi = 2r^2\,\widehat{A}$ + aire de ABC' + aire de $BA'C'$

Quand on réunit le triangle sphérique ABC' et le triangle sphérique ABC on obtient le fuseau d'angle $\widehat{C}$ limité par les méridiens CAC' et CBC'.

Quand on réunit le triangle sphérique $BA'C'$ et le triangle sphérique $A'B'C'$ on obtient le fuseau d'angle $\widehat{B}$ limité par les méridiens $BA'B'$ et $BC'B'$. Mais les triangles $A'B'C'$ et BAC sont symétriques par rapport à O ; ils ont donc même aire.

On obtient donc, en reprenant l'égalité ci-dessus

$$\begin{aligned} 2r^2\pi &= 2r^2\,\widehat{A} + (2r^2\,\widehat{C} - \text{aire de } ABC) + (2r^2\,\widehat{B} - \text{aire de } ABC) \\ &= 2r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - 2 \text{ aire de } ABC \end{aligned}$$

D'où $\quad$ aire de $ABC = r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$

Le nombre $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$ représente la valeur en radian de l'*excès sphérique* du triangle ABC ; on peut aussi mesurer l'excès sphérique en degré.

Remarque
Le triangle sphérique polaire associé au triangle sphérique a donc pour aire $r^2(2\pi - a + b + c)$ où les côtés a, b, c sont exprimés en radians. On en déduit que la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est inférieure à deux angles plats.

Conclusion

On a déjà compris, en travaillant sur quelques exemples, que les triangles sphériques sont des figures plus mystérieuses que les triangles plans de la géométrie euclidienne « traditionnelle ». Cependant on peut établir des analogies.

Les segments de droite de la géométrie plane sont les arcs de grands cercles de la géométrie sphérique.

L'inégalité triangulaire reste vérifiée.

En revanche certains résultats de la géométrie plane ne sont plus vérifiés.

Dans un triangle sphérique, la somme des trois angles n'est pas fixe. La formule de l'aire donnée ci-dessus permet de préciser que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ est compris entre 180° et 540°.

Si on connaît deux des angles d'un triangle sphérique, on ne peut pas, comme on a l'habitude de le faire en géométrie plane, en déduire simplement le troisième angle...

On verra dans le chapitre suivant de trigonométrie sphérique des formules liant les trois angles d'un triangle sphérique.

Formules et résolution de triangles

Dans tout ce chapitre ABC désigne un triangle sphérique construit sur une sphère de centre O. Ce triangle est donc caractérisé par ses trois côtés et ses trois angles, ce que l'on note

triangle sphérique ABC			
côtés	a	b	c
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$

On suppose que les trois côtés a , b, c et les trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ appartiennent aussi à l'intervalle $]0\ ;\ 180°[$. Le triangle sphérique est un « vrai » triangle inclus dans une demi-sphère, c'est-à-dire ni plat, ni un fuseau, ni la demi-sphère entière.

On rappelle que $a = \widehat{BOC}$; $b = \widehat{AOB}$; $c = \widehat{BOC}$; $\widehat{A} = \widehat{tAt'}$ où $[At)$ est la demi-tangente en A à l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Les mesures sont faites en degrés.

On va, dans ce chapitre, établir une série de formules de trigonométrie sphérique liant côtés et angles du triangle sphérique. Ces formules ont pour but de permettre la résolution des triangles sphériques. On adopte dans ce chapitre une démarche contemporaine : on établit d'abord une première formule (la formule des cosinus) ; on en déduit, par calcul algébrique la formule des sinus. En considérant le triangle polaire associé au triangle sphérique, on obtient une nouvelle série de formules « duales » des précédentes. On examinera enfin de plus près les formules particulières qu'on obtient dans un triangle sphérique rectangle.

La formule des cosinus

On va démontrer la formule : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$

Premier cas : on suppose $c < 90°$ et $b < 90°$

La figure ci-après, tracée, pour plus de lisibilité, avec $a < 90°$, illustre ce cas.

Le principe de la démonstration consiste à utiliser la trigonométrie classique dans les triangles rectangles plans dont les angles correspondent aux *angles* ou aux *côtés* du triangle sphérique, d'où la nécessité de considérer $c < 90°$ et $b < 90°$.

Les demi-droites $[At)$ et $[At')$ tangentes en A aux grands cercles AB et AC coupent respectivement les demi-droites $[OB)$ et $[OC)$ en D et E.

Le triangle plan AED inclus dans le plan perpendiculaire à (OA) qui passe par A est tel que $\widehat{EAD} = \widehat{A}$

Les triangles plans OAD et OAE sont rectangles en A et sont tels que $\widehat{AOD} = c$ et $\widehat{AOE} = b$

Le triangle OED inclus dans le plan (OBC) est tel que $\widehat{EOD} = a$

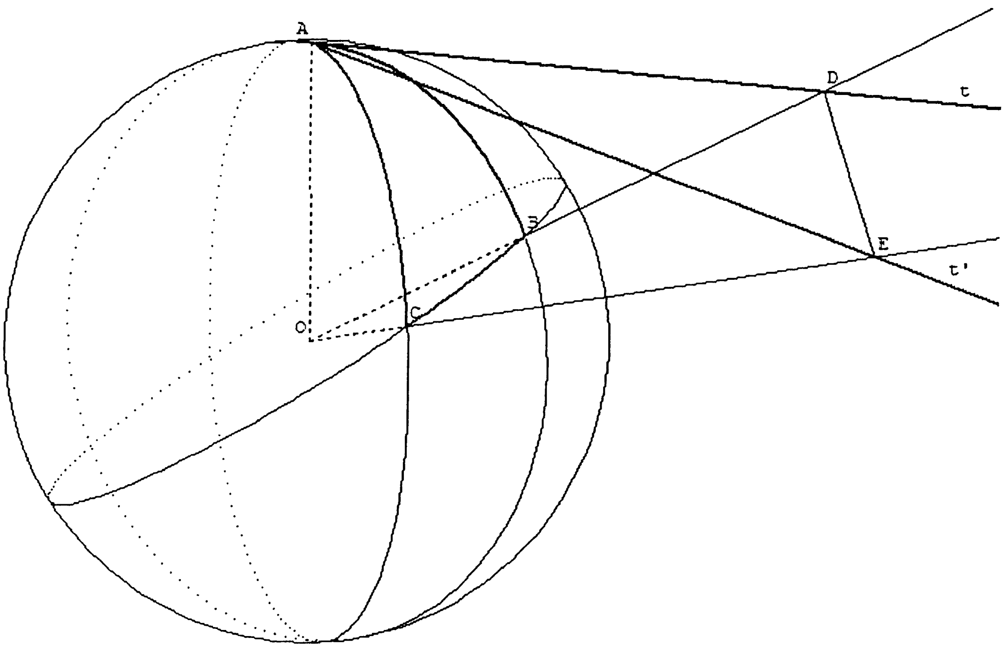


FIG 1 : Le triangle sphérique ABC

On extrait de cette figure de l'espace les quatre triangles plans évoqués précédemment.

Dans le triangle rectangle OAD on a les relations suivantes :

(1) $\cos c = \dfrac{OA}{OD}$

(2) $\tan c = \dfrac{AD}{AO}$

(3) $OD^2 = OA^2 + AD^2$

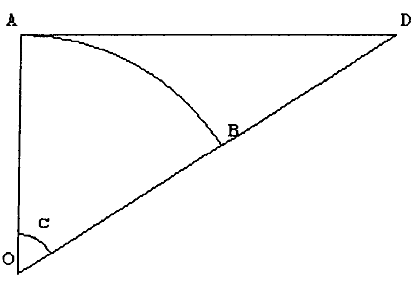


FIG 2 : OAD rectangle en A

Dans le triangle rectangle OAE on a les relations suivantes :

$$(4)\ \cos b = \frac{OA}{OE}$$

$$(5)\ \tan b = \frac{AE}{AO}$$

$$(6)\ OE^2 = OA^2 + AE^2$$

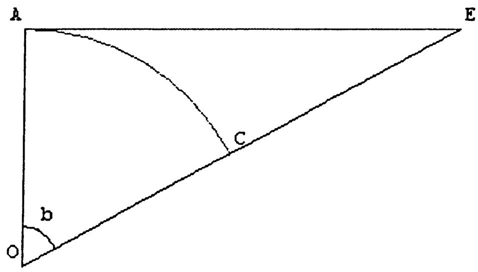


FIG 3 : OAE rectangle en A

Dans le triangle ODE on a la relation (7) suivante :

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \times OE \times \cos a$$

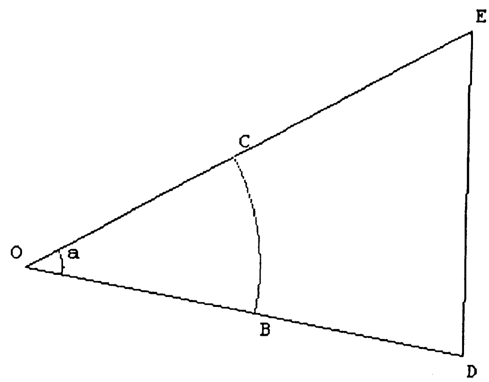


FIG 4 : Le triangle plan OED

Dans le triangle ADE on a la relation (8) suivante :

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \times AE \times \cos \widehat{A}\,.$$

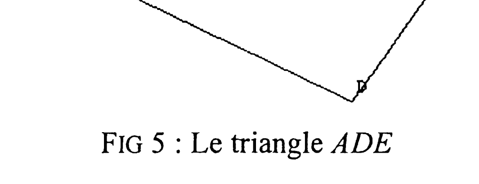


FIG 5 : Le triangle ADE

En soustrayant (7) et (8) on obtient :

$$0 = OD^2 - AD^2 + DE^2 - AE^2 - 2OD \times OE \times \cos a + 2AD \times AE \times \cos \widehat{A}\,.$$

Puis en utilisant (1) à (6), on arrive à :

$$0 = 2OA^2 - 2OA^2 \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + 2OA^2 \tan c \tan b \cos \widehat{A}\,.$$

Puis en divisant par $2OA^2$ on obtient :

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos \widehat{A} .$$

Et en multipliant par cos b cos c on obtient la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

Deuxième cas : on suppose $c > 90°$ et $b < 90°$

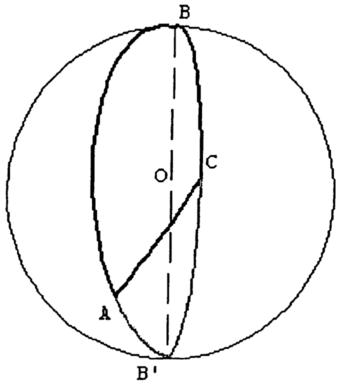


FIG 6 : Les triangles sphériques ABC et $AB'C$

On introduit le point B' diamétralement opposé à B ; on a les données suivantes :

triangle sphérique ABC				triangle sphérique $AB'C$			
côtés	a	$b < 90°$	$c > 90°$	côtés	$180° - a$	$b < 90°$	$180° - c < 90°$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	angles	$180° - \widehat{A}$	$\widehat{B}$	$180° - \widehat{C}$

Les résultats du premier cas s'appliquent au triangle sphérique $AB'C$. On obtient

$$\cos (180° - a) = \cos b \cos(180° - c) + \sin b \sin(180° - c)\cos(180° - \widehat{A})$$

$$-\cos a = -\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

et on retrouve encore $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$

Troisième cas : on suppose $c > 90°$et $b > 90°$

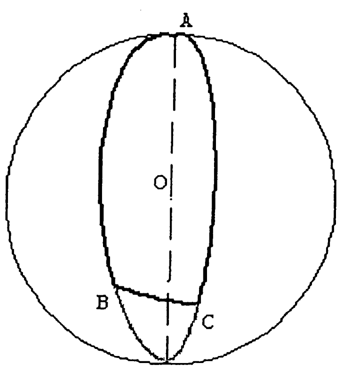


FIG 7 : Les triangles sphériques ABC et $A'BC$

On introduit le point A' diamétralement opposé à A ; on a les données suivantes :

triangle sphérique ABC				triangle sphérique $A'BC$			
côtés	a	$b > 90°$	$c > 90°$	côtés	a	$180° - b < 90°$	$180° - c < 90°$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	angles	$\widehat{A}$	$180° - \widehat{B}$	$180° - \widehat{C}$

Les résultats du premier cas s'appliquent au triangle sphérique $A'BC$. On obtient :

$$\cos a = -\cos b \times (-\cos c) + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A} .$$

La formule est encore vérifiée.

Étude des cas limites

Il reste à examiner ce qui se passe lorsque b ou c (ou les deux) vaut (valent) 90° ; dans ce cas, on ne peut construire le point E ou le point D ou les deux... En effet si $b = 90° = \widehat{AOC}$ alors la demi-tangente $[At')$ est parallèle à (OC) car $[At')$ et (OC) sont coplanaires et toutes deux perpendiculaires à (OA).

La formule étant valable pour tout b et c élément de $]0 ; 90°[\cup]90° ; 180°[$, elle reste vraie, par passage à la limite (les fonctions sinus et cosinus étant continues) lorsque b ou c ou les deux valent 90°.

On peut cependant examiner les cas particuliers suivants pour respecter l'approche géométrique.

Premier cas limite : on suppose $c = 90°$ et $b = 90°$

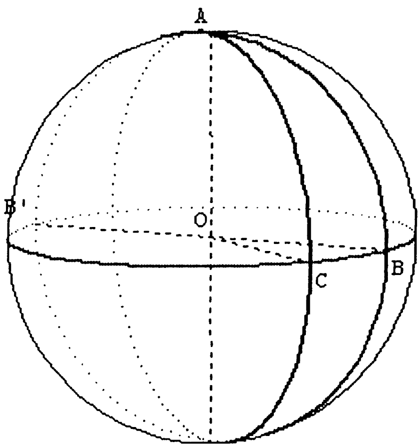


FIG 8 : Le triangle sphérique ABC avec deux côtes et deux angles droits

Dans ce cas (OA) est l'axe polaire du grand cercle $\widehat{BC}$ et on a alors :

triangle sphérique ABC			
côtés	a	$b = 90°$	$c = 90°$
angles	$\widehat{A} = a$	$\widehat{B} = 90°$	$\widehat{C} = 90°$

La formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$ reste vérifiée : elle devient tout simplement $\cos a = \cos a$!!!

Deuxième cas limite : on suppose $c = 90°$ et $b \neq 90°$ et $\widehat{A} \neq 90°$
On peut, quitte à travailler dans le triangle sphérique $A'BC$, supposer $b < 90°$.

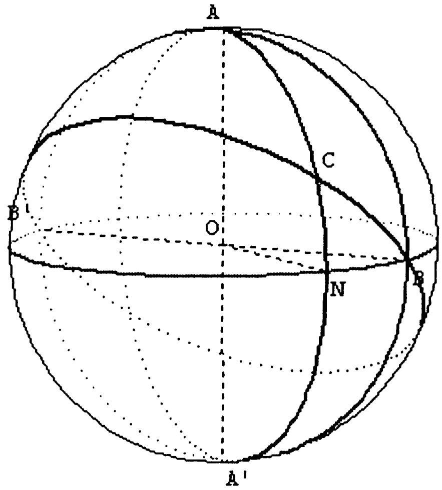


FIG 9 : Le triangle sphérique *ABC* avec un côté droit

(OA) est l'axe polaire du grand cercle BNB'. Le triangle NBC a deux côtés différents de 90°, le côté $\overset{\frown}{NB}$ et le côté $\overset{\frown}{NC}$. On a les données suivantes :

triangle sphérique *ABC*				Triangle sphérique *NBC*			
côtés	a	$b < 90°$	$c = 90°$	côtés	a	$90° - b \neq 90°$	$\widehat{A} \neq 90°$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	angles	$\widehat{N} = 90°$	$90° - \widehat{B}$	$180° - \widehat{C}$

La formule s'applique alors au triangle *NBC* et donne
$\cos a = \cos(90° - b)\cos \widehat{A} + \sin(90° - b)\sin \widehat{A} \cos(90°) = \sin b \cos \widehat{A}$
On a : $\cos a = \cos b \cos(90°) + \sin b \sin(90°)\cos \widehat{A}$.
La formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$ reste vérifiée.

Troisième cas limite : on suppose $c = 90°$ et $b \neq 90°$ et $\widehat{A} = 90°$

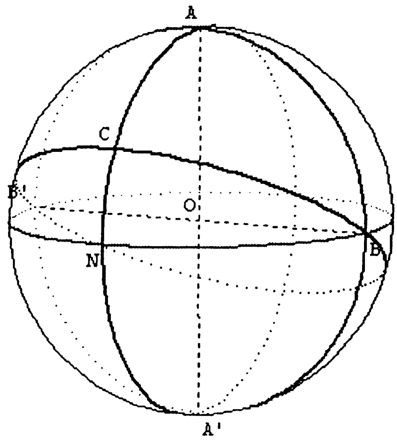


FIG 10 : Le triangle sphérique ABC avec $\widehat{A}$ et c droits

(OB) est l'axe polaire du grand cercle AC. Le plan (ANA') est médiateur du diamètre [BB'], et l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est la moitié du demi grand cercle $\overset{\frown}{BB'}$; on a les données suivantes :

triangle sphérique ABC			
côtés	$a = 90°$	b	$c = 90°$
angles	$\widehat{A} = 90°$	$\widehat{B}$	$\widehat{C} = 90°$

La formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$ reste vérifiée : elle devient tout simplement $0 = \cos b \times 0 + \sin b \times 1 \times 0$!!!

Conclusion

Proposition 1
Pour tout triangle sphérique ABC on a les relations suivantes
(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$
(2) $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \widehat{B}$
(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}$

(1) a été démontrée dans l'étude des cas.
(2) et (3) s'en déduisent par permutations.

Ces formules expriment un côté du triangle sphérique ABC en fonction des deux autres et de l'angle compris entre ces deux côtés. Si par exemple on connaît les trois données du tableau (sur fond gris clair), on peut en déduire directement le troisième côté (encadré), puis les deux autres angles.

côtés	a	b	c
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$

ce qui correspond à la figure suivante (en gras les éléments connus)

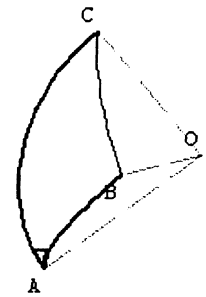
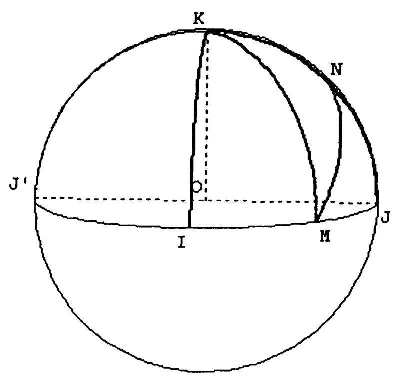


FIG 11 : Premier cas de résolution de triangle sphérique

Exemples

1) On reprend la figure 8 du chapitre triangle sphérique et étudions le triangle sphérique JMN.

côtés	$j = ?$	$m = 45°$	$n = 45°$
angles	$\widehat{J} = 90°$	$\widehat{M} = ?$	$\widehat{N} = ?$



On peut connaître les données manquantes. D'après la proposition 1 on peut écrire

$\cos j = \cos(45°)\cos(45°) + \sin(45°)\sin(45°)\cos(45°)$

$\cos j = \dfrac{1}{2}$ et $j = 60°$. Puis toujours en utilisant la proposition 1

$\cos(45°) = \cos(45°)\cos(60°) + \sin(45°)\sin(60°)\cos\widehat{M}$

d'où $\cos\widehat{M} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\widehat{M} \approx 54{,}7°$

On a le même résultat pour $\widehat{N}$.

2) Soit un triangle sphérique ABC dans lequel $b = 100°$, $c = 40°$ et $\widehat{A} = 35°$. On peut grâce à (1) calculer $\cos a$; on obtient $a \approx 67{,}3°$. Puis grâce à (2), on calcule

$\cos\widehat{B}$ et on en déduit $\widehat{B} \approx 142{,}3°$. Enfin grâce à (3), on calcule $\cos\widehat{C}$ et on en déduit $\widehat{C} \approx 23{,}6°$.

On peut enfin remarquer que, comme $-1 < \cos\widehat{A} < 1$, et $\sin b \sin c > 0$, quelles que soient les valeurs proposées pour $\widehat{A}$, b et c, le nombre $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\widehat{A}$ vérifie :
$\cos b \cos c - \sin b \sin c < \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\widehat{A} < \cos b \cos c + \sin b \sin c$
c'est-à-dire $\cos(b+c) < \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\widehat{A} < \cos(b-c)$.
Il est donc compris entre -1 et 1 et est le cosinus d'un réel a. On peut donc toujours construire un triangle sphérique dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils enferment.

La formule duale des cosinus

$A_1B_1C_1$ est le triangle sphérique polaire associé au triangle sphérique ABC.

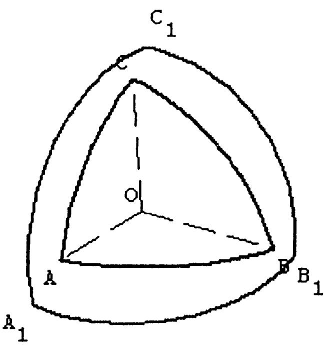


FIG 12 : Les triangles sphériques ABC et $A_1B_1C_1$ polaires l'un de l'autre

On rappelle les données suivantes :

triangle sphérique ABC				triangle sphérique $A_1B_1C_1$			
côtés	a	b	c	côtés	$180° - \widehat{A}$	$180° - \widehat{B}$	$180° - \widehat{C}$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	angles	$180° - a$	$180° - b$	$180° - c$

On peut bien sûr appliquer la proposition 1 au triangle sphérique $A_1B_1C_1$; on obtient alors trois nouvelles formules.
La formule (1) appliquée au triangle sphérique $A_1B_1C_1$ donne

$$-\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a.$$

On obtient : $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2
Pour tout triangle sphérique *ABC* on a les relations suivantes :
(4) $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos a$
(5) $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{C} \cos \widehat{A} + \sin \widehat{C} \sin \widehat{A} \cos b$
(6) $\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos c$

Ces formules expriment un angle du triangle sphérique *ABC* en fonction des deux autres et du côté compris entre ces deux angles. Si par exemple on connaît les trois données du tableau (sur fond gris), on peut en déduire directement le troisième angle (encadré), puis les deux autres côtés.

côtés	a	b	c
angles	$\boxed{\widehat{A}}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$

ce qui correspond à la figure suivante (en gras les éléments connus)

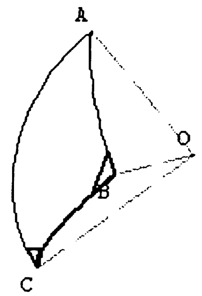


FIG 13 : Deuxième cas de résolution de triangle sphérique

Triangles particuliers

Un triangle rectangle isocèle plan a deux angles égaux à 45° et un angle droit. Aucun « vrai » triangle sphérique ne peut avoir de tels angles. La somme des angles d'un triangle sphérique, rappelons le, dépasse 180°. Que peut-on dire des triangles sphériques isocèles et équilatéraux ?

Si on suppose que $b = c$, on peut alors qualifier *ABC* de triangle sphérique « isocèle », alors en soustrayant les égalités (2) et (3) on obtient

$$\sin a \sin c(\cos \widehat{B} - \cos \widehat{C}) = 0 \text{ et } \cos \widehat{B} = \cos \widehat{C} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{C}$$

Un triangle sphérique qui a deux côtés égaux a aussi deux angles égaux.

Si $b = c = 70°$, et $\widehat{A} = 50°$, alors $\cos a = \cos^2(70°) + \sin^2(70°)\cos(50°) \approx 0{,}68$ d'où $a \approx 46{,}8°$; grâce à (2), on peut ensuite trouver $\widehat{B}$.

Si on suppose que $a = b = c$, on peut alors qualifier *ABC* de triangle sphérique équilatéral. Les formules (1), (2) et (3) permettent d'écrire

$$\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\cos a}{1 + \cos a}.$$

Les trois angles sont donc égaux ; leur somme dépassant 180°, chaque angle d'un triangle sphérique équilatéral dépasse 60°. Par ailleurs angle et côté d'un triangle équilatéral sont liés par l'égalité ci-dessus : si on connaît l'un, on peut trouver l'autre.

Si $a = b = c = 40°$, $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} \approx 0{,}434$ et $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \approx 64{,}3°$

Si $a = b = c = 60°$, $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} = \frac{1}{3}$ et $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \approx 70{,}5°$.

Si $a = b = c = 90°$, $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} = 0$ et $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90°$.

Enfin il n'existe aucun triangle sphérique équilatéral dont le côté dépasse 120°. On a vu que la somme des trois côtés est inférieure à 360°. D'ailleurs l'étude de la fonction $a \to \frac{\cos a}{1 + \cos a}$ le confirme : elle est strictement décroissante sur]0° ; 180°[et bijective de]0° ; 120°[dans]– 1 ; 0,5[

Si on suppose que $\widehat{B} = \widehat{C}$, on en déduit en soustrayant (5) et (6) que $\cos b = \cos c$ et on obtient $b = c$. Un triangle sphérique qui a deux angles égaux a deux côtés égaux.

Que peut-on dire d'un triangle sphérique ABC « équiangle », c'est à dire tel que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$? Les relations (4), (5), (6) donnent :

$$\cos a = \cos b = \cos c = \frac{\cos\hat{A} + \cos^2\hat{A}}{\sin^2\hat{A}} = \frac{\cos\hat{A}}{1 - \cos\hat{A}}$$

La somme des trois côtés étant inférieurs à 360°, on en déduit que les côtés d'un triangle équiangle sont égaux et inférieurs à 120°.

Si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 70°$, alors $\cos a = \cos b = \cos c \approx 0{,}51$ d'où $a = b = c \approx 58{,}7°$.

Si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 120°$, alors $\cos a = \cos b = \cos c = -\frac{1}{3}$; d'où $a = b = c \approx 109{,}5°$.

Si $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 135°$, alors $\cos a = \cos b = \cos c = \frac{-\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$; d'où $a = b = c \approx 114{,}5°$.

La formule des sinus

La formule des sinus, analogue à celle qu'on connaît dans les triangles plans est centrale en trigonométrie sphérique depuis le XI[e] siècle. Ce type de formule est d'un emploi particulièrement commode. De forme multiplicative, elle autorise à partir du XVII[e] siècle l'usage du logarithme ; de ce fait elle a été abondamment utilisée pour résoudre les triangles.

Proposition 3
Pour tout triangle sphérique ABC on a :

$$(7)\quad \frac{\sin\widehat{A}}{\sin a}=\frac{\sin\widehat{B}}{\sin b}=\frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$$

Démonstration
De la formule (1) on déduit

$\cos\widehat{A}=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$; il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2 a}&=\frac{1-\cos^2\widehat{A}}{\sin^2 a}\\
&=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\
&=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\
&=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 a-\cos^2 b\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\
&=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\
&=f(a,b,c)
\end{aligned}$$

L'expression obtenue est symétrique en a , b , c ; on peut alors en déduire que $\dfrac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2 a}=\dfrac{\sin^2\widehat{B}}{\sin^2 b}=\dfrac{\sin^2\widehat{C}}{\sin^2 c}$; et comme les côtés et les angles du triangle sphérique sont compris dans l'intervalle]0° ; 180°[, chacun de leur sinus est strictement positif ; la relation (7) s'en déduit aussitôt.

Lorsque le triangle sphérique a de « petits » côtés, leurs sinus leur sont presque égaux et la formule des sinus est presque celle des triangles plans, ce qui est logique puisque le triangle sphérique est alors lui-même presque plan.
Enfin la formule « duale » des sinus, que l'on obtient en écrivant la formule des sinus dans le triangle polaire associé au triangle ABC est équivalente à la formule des sinus elle-même.

Remarque sur la résolution des triangles

Si dans un triangle sphérique on connaît deux angles (respectivement deux côtés) et un des côtés en vis à vis (respectivement un des deux angles autre que celui compris entre les deux côtés) on peut *presque* en déduire l'autre côté en vis à vis (respectivement l'autre angle). Pourquoi *presque* ? Ici, et contrairement aux relations (1) à (6), la formule permet de calculer un sinus. Et chacun sait qu'un angle et son supplémentaire ont le même sinus !!!

On obtient deux nouveaux cas de résolution de triangles sphériques, illustrés sur les figures ci-après, les éléments gras étant supposés connus.

côtés	a	$\boldsymbol{b}$	$\boxed{c}$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{\boldsymbol{B}}$	$\widehat{\boldsymbol{C}}$

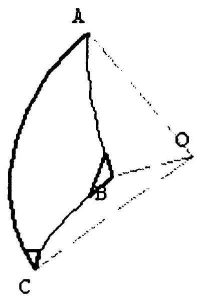


FIG 14 : Troisième cas de résolution de triangle sphérique

côtés	a	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{\boldsymbol{B}}$	$\boxed{\widehat{C}}$

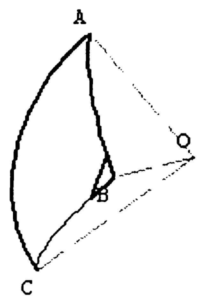


FIG 15 : Quatrième cas de résolution de triangle sphérique

Exemples

1) Supposons $\widehat{A} = 45°$; $a = 60°$; $\widehat{B} = 60°$; que peut-on dire de b ?

$\dfrac{\sin(45°)}{\sin(60°)} = \dfrac{\sin(60°)}{\sin b}$ donc $\sin b = \dfrac{\sin^2(60°)}{\sin(45°)} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}06$

Un tel triangle sphérique n'existe pas !

2) Supposons $\widehat{A} = 60°$; $a = 70°$; $\widehat{B} = 50°$; que peut-on dire de b ?

En utilisant la relation (7), on en déduit que $\sin b = \dfrac{\sin(70°)\sin(50°)}{\sin(60°)} \approx 0{,}831$; a priori il y a deux possibilités pour b qui sont $b \approx 56{,}2°$ ou $b \approx 123{,}8°$; et donc a priori deux triangles sphériques possibles.

Pour trouver b on ne peut utiliser ni les formules de la proposition 1, ni celles de la proposition 2. Et aucune des formules de trigonométrie sphérique donnée ci-dessus ne permet de donner $\widehat{C}$ et c.

Autres formules multiplicatives

Les formules données jusqu'à présent ne permettent pas de résoudre tout type de triangles, comme on vient de le voir dans l'exemple ci-dessus. La formule des sinus a, par rapport à celles des cosinus, l'avantage d'être multiplicative, et de se prêter à l'usage des logarithmes. On peut déduire de la relation (1) une autre famille de relations « multiplicatives » qui permettent de trouver les angles connaissant les trois côtés du triangle. La formule des cosinus le permet déjà, mais sa structure additive ne permet pas l'usage des logarithmes.

Proposition 4

Pour tout triangle sphérique ABC on a

(8) $\sin^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\frac{1}{\sin b\sin c}\times\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\times\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)$

(9) $\sin^2\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)=\frac{1}{\sin c\sin a}\times\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\times\sin\left(\frac{b-c+a}{2}\right)$

(10) $\sin^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)=\frac{1}{\sin a\sin b}\times\sin\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\times\sin\left(\frac{c-a+b}{2}\right)$

Démonstration

On utilise à nouveau la formule (1) des triangles sphériques.

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)&=\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}\right)\\
&=\frac{1}{\sin b\sin c}\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la formule classique

$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

On obtient par permutation les formules (9) et (10).

On pourrait réécrire ces trois égalités en faisant intervenir le « demi-périmètre » $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ du triangle sphérique. Cela donnerait :

$$(8)\ \sin^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\frac{1}{\sin b\sin c}\sin(p-b)\sin(p-c)$$

de même pour (9) et (10).

Enfin on peut en déduire trois formules « duales » en considérant le triangle sphérique polaire associé à *ABC*. Ces formules permettent de trouver les côtés connaissant les trois angles et se prêtent à l'usage des logarithmes.

Proposition 5
Pour tout triangle sphérique ABC on a

$$(11)\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)$$

$$(12)\ \cos^2\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{\sin\widehat{C}\sin\widehat{A}}\cos\left(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}-\widehat{A}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}+\widehat{A}}{2}\right)$$

$$(13)\ \cos^2\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}}\cos\left(\frac{\widehat{C}+\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}-\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)$$

Relations liant cinq éléments d'un triangle sphérique

Les différentes formules données précédemment lient quatre éléments d'un triangle (soit les trois côtés et un angle, soit les trois angles et un côté, soit deux côtés et deux angles). On va en établir de nouvelles liant cinq éléments. Elles permettent, en théorie, de régler des cas qu'on ne peut pas traiter avec les formules précédentes. Si par exemple on connaît deux côtés et les deux angles opposés à ces deux côtés, ni les formules des cosinus, ni la formule des sinus ne permet de trouver les éléments manquants.

Proposition 6

$$(14)\ \cos a\sin b-\sin a\cos b\cos\widehat{C}=\sin c\cos\widehat{A}$$

$$(15)\ \cos b\sin a-\sin b\cos a\cos\widehat{C}=\sin c\cos\widehat{B}$$

Démonstration
On reprend les formules établies dans la proposition 1.

D'après (1) on a $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$ et d'après (3) on a $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}$. On en déduit donc :

$$\cos a = \cos b\left(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C}\right) + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

$$= \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos \widehat{C} + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

Puis il vient par soustraction $\sin^2 b \cos a - \sin a \sin b \cos b \cos \widehat{C} = \sin b \sin c \cos \widehat{A}$
En divisant par sin$b$ on obtient la formule (14) de la proposition 6
La formule (15) se démontre selon le même principe : on remplace dans (2) cos$c$ par sa valeur obtenue avec (3).

Grâce au triangle sphérique polaire associé, on en déduit une nouvelle famille de formules liant trois angles et deux côtés. Elles sont données dans la proposition suivante.

Proposition 7
(16) $\cos \widehat{A} \sin \widehat{B} + \sin \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos c = \sin \widehat{C} \cos a$
(17) $\cos \widehat{B} \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{A} \cos c = \sin \widehat{C} \cos b$

Par permutation des lettres dans les formules (15) à (17) on obtiendrait quatre autres formules liant les trois côtés et deux angles et quatre autres formules liant les trois angles et deux côtés.

On peut déduire de ces formules une nouvelle série de formules liant deux côtés, l'angle compris entre ces deux côtés et l'angle opposé à l'un des deux côtés. On obtient la proposition suivante.

Proposition 8
(18) $\cot a \sin b - \cot \widehat{A} \sin \widehat{C} = \cos b \cos \widehat{C}$
(19) $\cot b \sin a - \cot \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos a \cos \widehat{C}$

Démonstration
On reprend la formule (14) et on divise chaque membre par sin$a$. Cela donne :

$$\cot a \sin b - \cos b \cos \widehat{C} = \frac{\sin c \cos \widehat{A}}{\sin a}$$

Mais $\dfrac{\sin c}{\sin a} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}}$, d'après la formule des sinus ; si bien que l'on obtient la formule (18). On obtient de même (19), et on obtient quatre nouvelles formules par permutations et on peut établir une nouvelle série de formules « duales » en utilisant le triangle sphérique polaire associé.

Un exemple litigieux
ABC est un triangle sphérique pour lequel on a $a = 70°$, $\widehat{A} = 60°$, et $\widehat{B} = 50°$. On sait que deux triangles peuvent vérifier ces conditions et la formule des sinus permet d'évaluer b. On a trouvé précédemment $b \approx 56{,}2°$ ou $b \approx 123{,}8°$. On connaît donc

quatre éléments du triangle : deux angles et les deux côtés opposée à ces angles. On souhaite évaluer le côté manquant c. La formule (16) permet d'écrire

$$\cos(60°)\sin(50°) + \sin(60°)\cos(50°)\cos c = \sin\widehat{C}\cos(60°)$$

La formule des sinus permet de remplacer $\sin\widehat{C}$ par $\dfrac{\sin c \sin\widehat{A}}{\sin a}$. On obtient alors la relation suivante

$$\cos(60°)\sin(50°) + \sin(60°)\cos(50°)\cos c = \frac{\sin(60°)}{\tan(70°)}\sin c.$$

C'est une équation du type $u \cos c + v \sin c = w$ où l'inconnue est c. Elle n'est guère engageante mais on connaît une méthode pour la résoudre. Le lecteur courageux peut le faire...

Les formules particulières aux triangles sphériques rectangles

Dans le cas où le triangle sphérique possède un angle droit, alors, quels que soient les deux éléments supplémentaires connus, on peut toujours en déduire *simplement* les trois éléments inconnus. Si bien que les cas litigieux pour un triangle sphérique quelconque peuvent être résolus malgré tout assez simplement. Il suffit de partager le triangle sphérique en deux triangles sphériques rectangles bien choisis.

On suppose à présent que ABC est un triangle sphérique rectangle en A c'est à dire tel que $\widehat{A} = 90°$. Le côté a est l'hypoténuse. On a forcément $\widehat{B} + \widehat{C} > 90°$. On reprend les formules précédentes en remplaçant $\widehat{A}$ par 90°. Elles vont se simplifier considérablement et on va obtenir une série de formules simples et toutes multiplicatives.

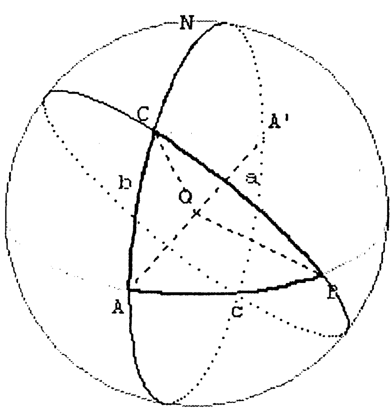


FIG 16 : Le triangle sphérique ABC rectangle en A

(1) devient :

> (1') $\cos a = \cos b \cos c$
> **Formule qui lie les trois côtés d'un triangle sphérique rectangle.**

On pourrait dire que cette formule correspond au théorème de Pythagore des triangles plans.
Si l'un des trois côtés d'un triangle sphérique rectangle est un quart de grand cercle, il y a forcément un deuxième côté égal à un quart de grand cercle. On l'a constaté sur la FIG 10.
Si l'hypoténuse est plus grande qu'un quart de cercle, alors un des côtés de l'angle droit et un seulement aussi.
Si l'hypoténuse est plus petite qu'un quart de cercle, alors soit les deux côtés de l'angle droit sont plus petits qu'un quart de cercle, soit il sont plus grands qu'un quart de cercle.
Remarquons enfin que si dans un vrai triangle sphérique ABC l'égalité ci-dessus $\cos a = \cos b \cos c$ est vérifiée, alors on en déduit que $\sin b \sin c \cos \widehat{A} = 0$ et donc que $\cos \widehat{A} = 0$ (puisque par hypothèse $\sin b$ et $\sin c$ sont non nuls), et ABC est rectangle en A. La formule (1') caractérise les triangles sphériques rectangles, tout comme le théorème de Pythagore caractérise les triangles rectangles plans.

(4) devient : $\cos a \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}$ ce qui donne

> (4') $\cos a = \cot \widehat{B} \cot \widehat{C}$
> **Formule qui lie les deux angles autres que le droit et l'hypoténuse.**

Si l'hypoténuse est égale à un quart de cercle, alors l'un des deux angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est droit.
Si ABC possède, en plus de l'angle $\widehat{A}$ un (respectivement deux) angle(s) droit(s), alors nécessairement $a = 90°$ et ABC possède quatre (respectivement six) éléments droits.

(5) et (6) deviennent

> (5') $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C} \cos b$
> (6') $\cos \widehat{C} = \sin \widehat{B} \cos c$
> **Formules qui lient les deux angles autres que le droit et un côté autre que l'hypoténuse.**

Un angle autre que le droit et son côté opposé sont forcément de même nature (c'est à dire tous deux aigus ou tous deux obtus)

(7) donne :

$$(7')\ \begin{cases} \sin\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{\sin b}{\sin a} \\ \sin\left(\widehat{C}\right) = \dfrac{\sin c}{\sin a} \end{cases}$$

Formules qui lient un angle autre que le droit, le côté opposé à cet angle et l'hypoténuse.

Ces formules rappellent les formules de trigonométrie classique dans les triangles plans.

Les formules (2) et (3) quant à elles deviennent

$\cos b = \cos c \cos b \cos c + \sin c \sin a \cos \widehat{B}$

$\cos b(1 - \cos^2 c) = \sin c \sin a \cos \widehat{B}$

$\cos b \sin^2 c = \sin c \sin a \cos \widehat{B}$ puis en divisant par $\sin c$

$\cos b \sin c = \sin a \cos \widehat{B}$ puis en remplaçant $\cos b$ par $\dfrac{\cos a}{\cos c}$ en supposant $c \neq 90°$

$\cos a \tan c = \sin a \cos \widehat{B}$; on en déduit

(2') $\tan c = \tan a \cos \widehat{B}$

pour tout triangle rectangle en A tel que $c \neq 90°$ et $a \neq 90°$

(3') $\tan b = \tan a \cos \widehat{C}$

pour tout triangle rectangle en A tel que $b \neq 90°$ et $a \neq 90°$

Formules qui lient l'hypoténuse, un angle autre que le droit et son côté adjacent.

De ces deux formules on déduit à nouveau

$$\frac{\tan c}{\tan b} = \frac{\cos\left(\widehat{B}\right)}{\cos\left(\widehat{C}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{C}\right)\cos b}{\cos\left(\widehat{C}\right)}$$ d'après (5') ; il s'en suit

(2'') $\tan c = \tan \widehat{C} \sin b$

pour tout triangle rectangle en A tel que $c \neq 90°$ et $a \neq 90°$

(3'') $\tan b = \tan \widehat{B} \sin c$

pour tout triangle rectangle en A tel que $b \neq 90°$ et $a \neq 90°$

Formules qui lient un angle autre que le droit et les deux côtés autres que l'hypoténuse.

Ces formules rappellent les formules de trigonométrie dans les triangles rectangles plans.

Divers cas de résolution de triangles sphériques rectangles

Un triangle sphérique rectangle est résoluble dès lors que l'on connaît trois de ses six éléments, l'angle droit et deux autres éléments. Les triangles sphériques rectangles sont plus simples à utiliser que les triangles sphériques quelconques, comme en géométrie plane...

Les triangles sphériques rectangles en A sont de trois sortes selon qu'ils possèdent un, deux ou trois angles droits. On les configurations suivantes :

côtés	$a \neq 90°$	$b \neq 90°$	$c \neq 90°$
angles	$\widehat{A} = 90°$	$\widehat{B} \neq 90°$	$\widehat{C} \neq 90°$

Dans ce premier cas, b et $\widehat{B}$ sont de même nature tout comme c et $\widehat{C}$.

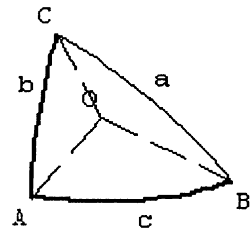
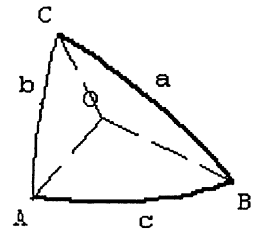
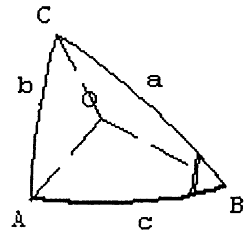
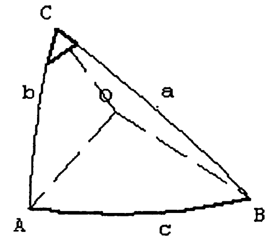
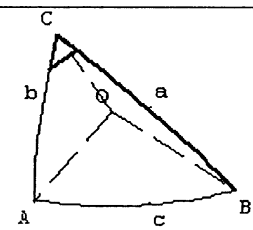
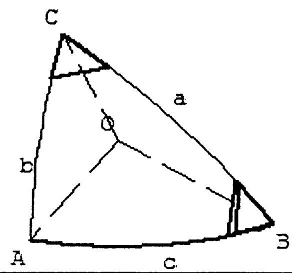
côtés	$a = 90°$	$b = 90°$	$c \neq 90°$
angles	$\widehat{A} = 90°$	$\widehat{B} = 90°$	$\widehat{C} = c°$

Les triangles de ce type sont tels que C est un pôle du grand cercle AB.

côtés	$a = 90°$	$b = 90°$	$c = 90°$
angles	$\widehat{A} = 90°$	$\widehat{B} = 90°$	$\widehat{C} = 90°$

Les triangles de ce type représentent un huitième de la sphère.

On s'intéresse à présent aux triangles sphériques rectangles relevant de la première configuration, c'est à dire avec un seul des six éléments droit. On adopte la convention suivante : on note sur la figure en gras les deux éléments connus en plus de l'angle droit $\widehat{A}$.

Premier cas de figure On connaît $\widehat{A}$, b , c ; On connaît donc la nature de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$; grâce à (1') on trouve a ; grâce à (2'') et (3'') on trouve $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$	
Deuxième cas de figure On connaît $\widehat{A}$, c et l'hypoténuse a ; On connaît donc la nature de $\widehat{C}$; grâce à (1') on trouve b et on a a nature de $\widehat{B}$; grâce à (2') et (3') on trouve $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$	
Troisième cas de figure On connaît $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et c ; On connaît donc la nature de b et $\widehat{C}$; grâce à (6') on trouve $\widehat{C}$; grâce à (4') on trouve a ; grâce à (1') on trouve b	
Quatrième cas de figure On connaît $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ et c ; grâce à (7') on trouve sin$a$; grâce à (6') on trouve sin $\widehat{B}$; grâce à (7') on trouve sin$b$ Dans ce cas on trouve deux triangles : le premier avec a aigu, le deuxième avec a obtus.	
Cinquième cas de figure On connaît $\widehat{A}$, a et $\widehat{C}$; On connaît donc la nature de c ; grâce à (7') on trouve c ; grâce à (2') on trouve $\widehat{B}$; grâce à (3') on trouve b	
Sixième cas de figure On connaît les trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ On connaît donc la nature de b et c ; grâce à (5') et (6') on trouve b et c ; grâce à (1') on trouve a	

Quelques résolutions de triangles sphériques

Les trois premiers exemples qui vont suivre sont extraits des œuvres mathématiques de Simon Stevin. Nous allons les résoudre en utilisant les formules établies dans ce chapitre. Mais nous verrons dans le prochain chapitre comment Stevin les résolvait. Le quatrième exemple reprend le cas litigieux évoqué plus haut et le résout.

Premier exemple

ABC est rectangle et on a les données suivantes

côtés	a	$b = 50°$	$c = 29°30'$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B} = 90°$	$\widehat{C}$

$\cos b = \cos a \cos c$ donc $\cos a = \dfrac{\cos b}{\cos c} \approx 0{,}73853$; d'où $a \approx 42°24'$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$, d'où $\cos \widehat{A} \approx 0{,}47474$ et $\widehat{A} \approx 61°39'$

$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \widehat{C}$, d'où $\cos \widehat{C} \approx 0{,}76592$ et $\widehat{C} \approx 40°$

Deuxième exemple

ABC est rectalère (avec un côté droit) et on a les données suivantes

côtés	a	$b = 90°$	$c = 68°37'$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B} = 68°27'$	$\widehat{C}$

La formule des sinus donne a priori deux valeurs possibles pour l'angle $\widehat{C}$. On obtient $\widehat{C} \approx 60°$ ou $\widehat{C} \approx 120°$.

La formule (19) $\cot b \sin a - \cot \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos a \cos \widehat{C}$ se simplifie car $\cot b = 0$; on obtient $\cos a = \dfrac{-\cot \widehat{B} \sin \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \dfrac{-\tan \widehat{C}}{\tan \widehat{B}}$

Si on suppose $\widehat{C} = 60°$, cela conduit à $a \approx 133°10'$.

Puis la formule des cosinus donne $\cos a = \sin c \cos \widehat{A}$ d'où $\widehat{A} \approx 137°17'$.

On a donc la solution suivante :

côtés	$a = 133°10'$	$b = 90°$	$c = 68°37'$
angles	$\widehat{A} = 137°17'$	$\widehat{B} = 68°27'$	$\widehat{C} = 60°$

Si on suppose $\widehat{C} = 120°$, cela conduit à $a \approx 46°50'$.

La formule des cosinus donne alors $\widehat{A} \approx 42°29'$

On a donc la solution suivante :

côtés	$a = 46°50'$	$b = 90°$	$c = 68°37'$
angles	$\widehat{A} = 42°29'$	$\widehat{B} = 68°27'$	$\widehat{C} = 120°$

Cette dernière solution ne fournit pas un triangle sphérique. La formule des cosinus donne ici $\cos c = \sin a \cos \widehat{C}$ et cette égalité ne peut être réalisée puisque $\widehat{C}$ et c ne sont pas de même nature (les deux membres de l'égalité sont de signes différents).

On pourrait retrouver aussi ces résultats en travaillant dans le triangle sphérique polaire de ABC. Ce triangle $A_1B_1C_1$ serait alors rectangle en B_1 et résoluble. On en déduit ses six éléments puis ceux de ABC.

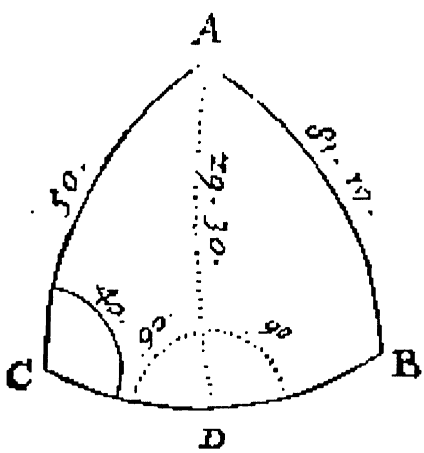
Troisième exemple

ABC est quelconque et on a les données suivantes

côtés	a	$b = 50°$	$c = 81°19'$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C} = 40°$

La formule des sinus fournit deux valeurs a priori possibles pour $\hat{B}$; on obtient soit $\hat{B} \approx 29°53'$ soit $\hat{B} \approx 150°7'$.
Contrairement à la situation précédente, la formule (19) ne se simplifie pas et son emploi conduit à résoudre l'équation d'inconnue a suivante :

$\cot(50°)\sin a - \cot\hat{B}\,\sin(40°) = \cos(40°)\cos a$.
On va plutôt construire le demi grand cercle qui passe par A et est perpendiculaire au grand cercle BC. Soit D le point d'intersection de ce demi grand cercle et du grand cercle BC. On a ainsi fabriqué deux triangles sphériques rectangles, ABD et ACD.



On a pour chacun d'eux les données suivantes :
Pour le triangle ACD

côtés	$a = \widehat{CD}$	$c = \widehat{AD}$	$d = 50°$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{C} = 40°$	90°

Pour le triangle ABD

côtés	$a = \widehat{DB}$	$b = \widehat{AD}$	$d = 81°19'$
angles	$\widehat{A}$	$\hat{B}$	90°

On résout d'abord le triangle sphérique rectangle ACD. Son hypoténuse est aiguë ; donc les deux autres côtés, et les deux angles non droits, sont de même nature c'est-à-dire aiguë comme $\widehat{C}$. La formule des sinus donne *la* valeur de $c = \widehat{AD} \approx 29°30'$.
La formule (2') donne $\tan a = \tan d \cos \widehat{C}$; d'où $a = \widehat{CD} \approx 42°24'$.
La formule des sinus donne alors la valeur de $\widehat{A} \approx 61°40'$.

On peut alors résoudre le triangle ABD. On a maintenant les données suivantes :

côtés	a	$b = 29°30'$	$d = 81°19'$
angles	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	90°

La formule (1') permet le calcul du troisième côté :

$\cos d = \cos a \cos b$ donne $a = \widehat{DB} \approx 80°1'$.

Tous les côtés sont aigus donc tous les angles aussi. On a nécessairement $\widehat{B} \approx 29°53'$.

La formule des sinus donne enfin la valeur de $\widehat{A} \approx 85°3'$.

Il ne reste plus qu'à recoller les morceaux pour résoudre le triangle de départ.

$\widehat{A} \approx 85°3' + 61°40' = 146°43'$.

$\widehat{B} \approx 29°53'$.

$A \approx 42°24' + 80°1' = 122°25'$.

Retour au cas de figure litigieux

Le troisième cas détaillé ci-dessus fait partie des cas litigieux. Plus généralement, si ABC est un triangle sphérique quelconque dont on connaît les quatre éléments $\widehat{A}$, a, $\widehat{B}$, b, on peut le résoudre en utilisant deux triangles sphériques rectangles. Il suffit pour trouver $\widehat{C}$ et c de construire l'arc $\widehat{CH}$ perpendiculaire au côté $\widehat{AB}$, avec H appartenant au grand cercle AB, de sorte que les triangles sphériques CAH et CBH sont rectangles en H et résolubles. On en déduit alors $\widehat{AH}$ et $\widehat{ACH}$; puis $\widehat{BH}$ et $\widehat{BCH}$; puis par addition, si $\widehat{CH}$ est intérieur au triangle ABC, ou par soustraction si $\widehat{CH}$ est extérieur au triangle AB, on en déduit $\widehat{AB} = c$ et $\widehat{C}$. La « hauteur » $\widehat{CH}$ du triangle sphérique ABC est intérieure au triangle si les deux angles de sommets A et B sont de même nature (tous deux aigus, ou tous deux obtus), elle est à l'extérieur du triangle dans le cas contraire, comme on le voit sur les figures ci-dessous.

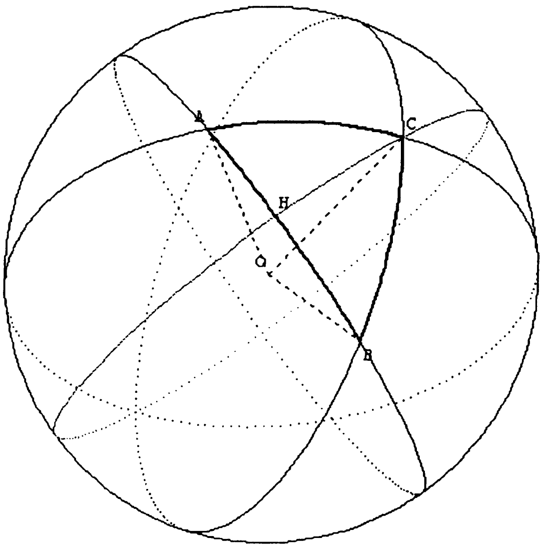


FIG 17 : La hauteur CH intérieure au triangle ABC et à son supplémentaire ABC'

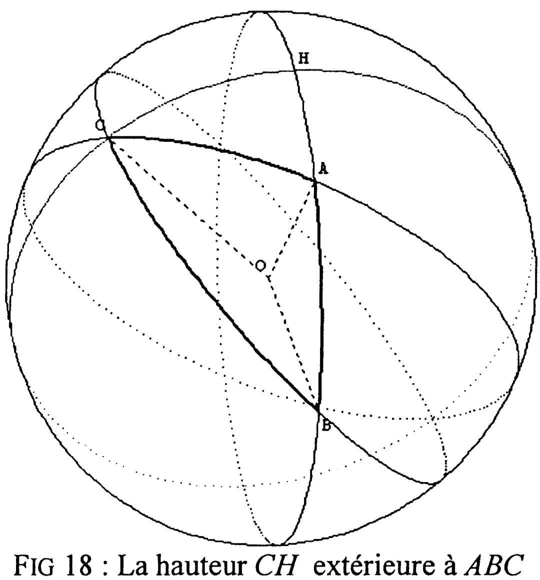


FIG 18 : La hauteur CH extérieure à ABC

On reprend l'exemple litigieux et on va le résoudre. On rappelle les données

$$\widehat{A} = 60°,\ a = 70°,\ \text{et}\ \widehat{B} = 50°.$$

Et on choisit parmi les deux possibilités de b la valeur $b \approx 56{,}2°$. On peut considérer que c'est le triangle de la FIG 17. Les deux angles autres que celui de sommet C étant aigus, la hauteur CH est à l'intérieur du triangle.

Dans le triangle rectangle BCH on a $\tan \widehat{BH} = \tan a \cos \widehat{B} \approx 1{,}76$ et $\widehat{BH} \approx 60{,}5°$.

Dans le triangle rectangle ACH, on a $\tan \widehat{AH} = \tan b \cos \widehat{A} \approx 0{,}74$ et $\widehat{AH} \approx 36{,}8°$

Finalement $c = \widehat{BH} + \widehat{AH} \approx 97{,}3°$.

La formule des sinus donne $\sin \widehat{C} = \dfrac{\sin c \sin \widehat{A}}{\sin a} \approx 0{,}914$. On en déduit $\widehat{C} \approx 66{,}1°$.ou

$\widehat{C} \approx 113{,}9°$.

La formule des cosinus donne $\cos\widehat{C} = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \approx -\,0{,}406$.

La solution est donc $\widehat{C} \approx 113{,}9°$.

On peut vérifier que l'autre éventualité $b \approx 123{,}8°$ conduit à une impossibilité. Cela donnerait $\widehat{AH} \approx 143{,}2°$ puis $c \approx 184{,}3°$; et $a + b + c > 360°$.

Il existe donc un seul triangle sphérique qui vérifie $\widehat{A} = 60°$, $a = 70°$, et $\widehat{B} = 50°$.

La trigonométrie sphérique au XVI^e siècle enseignée par Simon Stevin

La démarche des mathématiciens du XVI^e siècle n'est évidemment pas celle utilisée dans le chapitre précédent : le cosinus n'existe pas ; le sinus n'est pas encore une fonction ; on calcule des sinus, des tangentes, des sécantes d'angles ou d'arcs en choisissant une valeur de rayon qui représente le sinus de l'angle droit ; Stevin choisit dans les exemples qu'il expose R = 10000. L'outil de démonstration est la propriété des triangles semblables. La définition des lignes trigonométriques utilisées, sinus, tangente, sécante, et verse est rappelée ci-dessous.

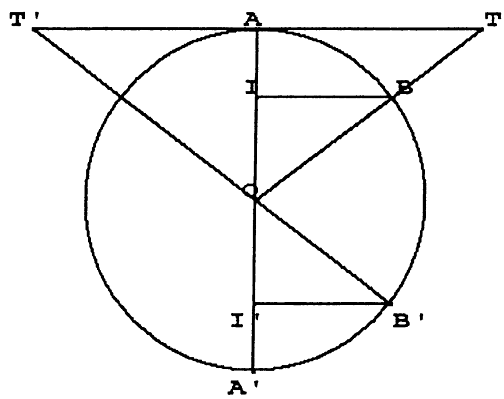
$\sin(90°) = OA$

$\sin\left(\widehat{AB}\right) = \sin\left(\widehat{AOB}\right) = BI$

$\tan\left(\widehat{AB}\right) = \tan\left(\widehat{AOB}\right) = AT$

$\sec\left(\widehat{AB}\right) = \sec\left(\widehat{AOB}\right) = OT$

$\text{verse}\left(\widehat{AB}\right) = \text{verse}\left(\widehat{AOB}\right) = AI$



Une ligne trigonométrique est avant tout la longueur d'un segment. Il existe des tables de sinus, de tangentes, de sécantes remarquablement précises donnant des résultats entiers et liés à la valeur du rayon choisi.
Un angle et son supplémentaire ont les mêmes sinus, tangentes et sécantes. Cela rend nécessaire la connaissance a priori de la nature de l'angle, ou de l'arc (aigu, obtus ou droit).
En langage moderne, la sécante correspond à l'inverse du cosinus et le verse correspond à 1 moins le cosinus. Et bien sûr sin(90°) = 1.

Nous allons ici brièvement analyser le troisième livre *Des triangles sphériques.* C'est une partie des *œuvres mathématiques* de Simon Stevin de Bruges, extraite du second volume *La cosmographie.* Ce livre se compose de trois parties. Dans la première Stevin énonce et démontre des résultats généraux sur les triangles sphériques, et les triangles sphériques rectangles, ainsi que quelques propriétés de trigonométrie plane. Il s'intéresse précisément à la nature des angles ou côtés des triangles sphériques qui peuvent être aigus, obtus ou droits. Ces résultats lui seront utiles dans les parties suivantes. Connaissant une ligne trigonométrique (par exemple le sinus d'un angle) et la nature de cet angle (par exemple obtus), il pourra en déduire la valeur de l'angle, grâce aux tables.

Dans la deuxième partie, il démontre neuf théorèmes correspondant à neuf formules de trigonométrie sphérique.

Dans la troisième partie, qui constitue une sorte d'apothéose, il prouve que tout triangle sphérique dont on connaît trois des six éléments est résoluble. Il passe en revue tous les cas possibles de résolution ce qui rend la lecture fastidieuse. Cependant il met en place un système de représentation et un index très astucieux, re^produit ci-après, qui facilite l'usage. Ainsi, par exemple, un astronome ayant à résoudre un triangle sphérique dont il connaît deux angles aigus et le côté situé entre ces deux angles trouvera dans l'index à quelle page du livre est résolu ce type de triangle.

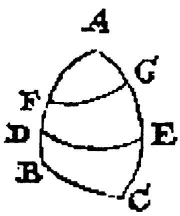
Lorsque nous citerons Stevin, nous écrirons en italique. Lorsque nous jugerons préférable de modifier pour faciliter la compréhension, le texte de Stevin, nous utiliserons les caractères droits.

Pour démontrer les formules de trigonométrie sphérique, Stevin procède à l'envers de la démarche exposée dans le précédent chapitre : il commence par étudier les triangles sphériques rectangles, et ensuite il en déduit les résultats généraux sur les triangles sphériques. Il va du particulier vers le général, n'omettant aucun cas particulier et opérant une classification très minutieuse des triangles. Son objectif est de « résoudre » n'importe quel type de triangle sphérique. Tout est démontré, et illustré. Les démonstrations sont claires et se présentent selon le plan suivant :

les *données* écrites et illustrées par une figure,
le *requis* reformulé,
la *préparation* de la démonstration où la figure est complétée,
la *démonstration* proprement dite.

Stevin donne d'abord deux définitions : la première décrit un triangle sphérique comme *superficie sphérique comprise entre trois arcs de cercles majeurs* (c'est à dire de grands cercles), *chacun moindre qu'un demi-cercle* ; la seconde donne la grandeur de l'angle sphérique. L'angle $\widehat{BAC}$ d'un triangle sphérique ABC a pour mesure celle de l'arc $\widehat{DE}$ qui a pour pôle A et qui coupe les grands cercles AB et AC en D et E.

Soient A B, A C, deux arcs de cercles majeurs, faiſant l'angle ſpherique B A C : Apres ſoit D E un autre arc de cercle majeur, deſcrit entre les deux arcs de l'angle A B, A C, ſur le poinct de l'angle A comme pole : Ce qui eſtant ainſi, je dis que la grandeur de l'angle B A C, ſe denote avec l'arc D E. Comme par exemple le meſme arc D E eſtant de 80 degr. on dit la grandeur de A eſtre de 80 degr. Soient pour plus ample declaration entre D A & E A, mis les poincts F, G, & tirez les arcs de cercles maieurs F G, B C:



Stevin est conscient de la difficulté à représenter sur le papier les figures sphériques, tout en insistant sur la nécessité de ces dessins. Aussi conseille-t-il d'utiliser une sphère céleste ou terrestre, ou même une petite boule de cire dont le diamètre est d'environ un pouce[4], d'y marquer les grands et petits cercles, les angles sphériques aigus et obtus, les effaçant après usage. « *Tellement que ceux qui se veulent exercer en cette matière s'en peuvent pourvoir, afin d'entendre ainsi clairement et facilement ce qu'autrement aux figures plates des livres est plus obscur.* »

Veu qu'en la doctrine des arts mathematiques, c'eſt un grand advantage, que les figures dont on ſe ſert pour la declaration du deſſein, ayent bonne reſſemblance avec le denoté, & que triangles ſpheriques avec d'autres arts y appartenants, ſouvent ne ſe peuvent bien imiter en plan ſur du papier, ce qui rend la doctrine plus obſcure : On prend à icelle fin une ſphere celeſte ou terreſtre, avec ſes cercles diſtinguez en degrez, ou une ſphere de bois, ou d'autre matiere ſolide, ſur laquelle on marque des arcs de longueur cognuë : Ou ſi ce n'eſtoit que pour entendre les theoremes, qui n'ont point une quantité de degrez exprimez, on peut auſſi prendre pour cela, comme a fait *Son Excellence*, une petite boule de cire jaune, dont le diametre ſoit environ d'une poulce, y marquant deſſus tels cercles & arcs grands & petis, angles droits, aigus, & obtus, comme la choſe le requiert, les effaçant apres, comme on efface l'eſcriture deſſus une ardoiſe, & y mettant derechef d'autres ſelon noſtre deſir, ce qui ſert de beaucoup pour l'imagination. Tellement que ceux qui ſe veulent exercer en ceſte matiere, s'en peuvent pourvoir, afin d'entendre ainſi clairement & facilement, ce qu'autrement aux figures plates des livres eſt plus obſcur.

[4] Un pouce est environ égal à 2,5 cm

Première partie : catalogue des cas

Dans cette première partie, Stevin prépare le terrain pour les formules de trigonométrie sphérique à venir. Il énonce et démontre dix huit *théorèmes* qui donnent des résultats généraux sur les triangles sphériques et les triangles sphériques rectangles. Il envisage tous les cas de figure selon la nature des angles (droit, aigu ou obtus) et des côtés (inférieur, supérieur ou égal à un quart de grand cercle). Les démonstrations accompagnées de figures font le plus souvent intervenir des situations particulières connues : l'un des côtés du triangle est prolongé en un demi grand cercle, ou en un quart de grand cercle ; un des sommets du triangle est considéré comme pôle d'un grand cercle...

Puis il donne quatre relations de trigonométrie plane entre les lignes trigonométriques des angles et de leurs complémentaires. Ces relations ne sont pas données sous la forme de formule algébrique, mais énoncées comme des analogies, c'est à dire des situations de proportionnalité, ou « règle de trois ». Nous allons donner, autant que faire se peut, ces théorèmes dans une formulation contemporaine plus parlante.

Théorème I : Si un grand cercle C passe par le pôle d'un grand cercle C', alors ces deux grands cercles sont perpendiculaires.

Ce théorème s'accompagne de treize conséquences.

Théorème II : ABC est un triangle sphérique rectangle en B ;
si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est inférieur à un quart de grand cercle, alors l'angle opposé $\widehat{C}$ est aigu ;
si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est supérieur à un quart de grand cercle, alors l'angle opposé $\widehat{C}$ est obtus ;
si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égal à un quart de grand cercle, alors l'angle opposé $\widehat{C}$ est droit et A est un pôle de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Théorème III : ABC est un triangle sphérique rectangle en B ;
si les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$ sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à un quart de grand cercle, alors l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ est inférieure à un quart de grand cercle ;
si l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$ est inférieur et l'autre supérieur à un quart de grand cercle, alors l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ est supérieure à un quart de grand cercle.

Théorème IV : Si l'hypoténuse et un côté de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle sont tous les deux plus grands qu'un quart de grand cercle, alors le troisième côté est inférieur à un quart de grand cercle.

Théorème V : ABC est un triangle sphérique rectangle en B ;
si les deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont tous deux aigus ou tous deux obtus, alors l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ est inférieure à un quart de grand cercle ;

si l'un des deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ est aigu et l'autre obtus alors l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ est supérieure à un quart de grand cercle.

Théorème VI : ABC est un triangle sphérique ;

si les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus, alors la hauteur issue de A du triangle est à l'intérieur du triangle ;

si l'un des deux angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est aigu et l'autre obtus, alors la hauteur issue de A du triangle est à l'extérieur du triangle.

Théorème VII : Si les trois angles d'un triangle sphérique sont aigus, alors les trois côtés sont inférieurs à un quart de grand cercle.

Théorème VIII : Si un triangle sphérique à deux angles aigus et égaux, alors les deux côtés opposés à ces angles sont inférieurs à un quart de grand cercle et égaux.

Théorème XI : Si un triangle sphérique a deux angles aigus et inégaux et le troisième angle obtus, alors le côté opposé au plus petit angle est inférieur à un quart de grand cercle.

Théorème X : Si un triangle sphérique a trois côtés inférieurs à un quart de grand cercle, les deux angles opposés aux deux plus petits côtés sont aigus.

Théorème XI : Si les côtés de l'angle $\widehat{A}$ sont inférieurs à un quart de grand cercle, et si le côté opposé à A est plus grand que l'un des deux autres côtés, alors la hauteur issue de A est à l'intérieur du triangle sphérique.

Théorème XII : Si les côtés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ sont inférieurs à un quart de grand cercle et si $\overset{\frown}{BC}$ est supérieur à un quart de grand cercle, alors les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ sont aigus et $\widehat{A}$ est obtus.

Théorème XIII : Si les côtés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ sont respectivement égal et inférieur à un quart de grand cercle et si $\overset{\frown}{BC}$ est supérieur à un quart de grand cercle, alors les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ sont aigus et $\widehat{A}$ est obtus.

Théorème XIV : La somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à deux angles droits.

Théorème XV : Dans un triangle sphérique le plus grand angle est opposé au plus grand côté.

Théorème XVI : Si ABC est rectangle en B et si $\widehat{C}$ est aigu, alors pour tout point D du côté $\overset{\frown}{BC}$ l'arc $\overset{\frown}{AD}$ est inférieur à l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ et supérieur au côté $\overset{\frown}{AB}$. On a la conclusion contraire si $\widehat{C}$ est obtus.

Théorème XVII : La somme de deux côtés est supérieure au troisième côté.

Théorème XVIII : La somme des trois côtés est inférieure à un grand cercle.

Les quatre théorèmes suivants donnent des résultats de trigonométrie sur les angles complémentaires.

Théorème XIX : *Le sinus d'un angle droit est moyen proportionnel entre la tangente d'un arc et la tangente de son arc complémentaire.*

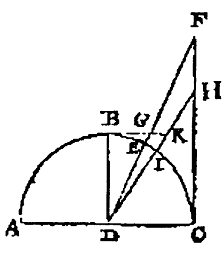
Ce qui correspond, en langage contemporain à la relation : $1 = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Prenons la peine d'examiner la démonstration que donne Stevin.

THEOREME. XIX. PROPOSITION.

LE sinus d'un angle droit, est moyen proportionnel entre la tangente d'un arc posé, & la tangente de son arc de complement.

Le donné. Soit A B C un demicercle, dont le centre est D, & B C le quart d'un cercle, dedans lequel C E est un arc posé, dont la tangente C F en B E son arc de complement, & duquel la tangente B G, & CD sinus de l'angle droit.



Le requis. Il faut demonstrer que D C est moyen proportionnel entre C F & B G.

DEMONSTRATION.

Les deux triangles CFD, BDG, sont droits en C, & en B, & l'angle FDC est egal à l'angle DGB, parquoi les mesmes deux triangles sont semblables, & leurs costez homologues proportionnels, qui est:

Comme CF à CD, ainsi DB à BG:

Mais CD est egale à DB, parquoi

Comme CF à CD, ainsi CD à BG.

Tellement que CD est moyenne proportionnelle entre CF & BG.

Conclusion. Doncques le sinus d'un angle droit, est moyen proportionnel entre la tangente d'un arc posé, & la tangente de son arc de complement: ce qu'il falloit demonstrer.

L'arc en question est l'arc $\overset{\frown}{CE}$; l'arc complémentaire est $\overset{\frown}{BE}$; $\tan \overset{\frown}{CE} = CF$; $\tan \overset{\frown}{BE} = BG$; le sinus de l'angle droit est le rayon *CD*.

Les triangles rectangles *CFD* et *BDG* contenant les lignes trigonométriques ci-dessus sont semblables car leurs angles sont égaux deux à deux. Leurs côtés sont proportionnels, et on en déduit, en traduisant algébriquement les propos de Stevin :

$\frac{CF}{CD} = \frac{DB}{BG}$; puis $CD = DB$; donc $\frac{CF}{CD} = \frac{CD}{BG}$; c'est à dire *CD* moyenne proportionnelle entre *CF* et *BG*.

Théorème XX *: Les tangentes de deux arcs sont alternativement[5] proportionnelles aux tangentes de leurs arcs complémentaires.*

Ce qui se traduit par $\dfrac{\tan x}{\tan y}=\dfrac{\tan(90°-y)}{\tan(90°-x)}$

Théorème XXI *: Le sinus de l'angle droit est moyen proportionnel entre le sinus d'un arc et la sécante de l'arc complémentaire.*

Ce qui se traduit en langage contemporain par $1 = \sin x \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$

La démonstration est du même genre que celle du théorème XIX.

Théorème XXII *: Les sinus de deux arcs sont alternativement proportionnels avec les sécantes de leurs compléments.*

Ce qui se traduit par $\dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{\sin(90°-y)}{\sin(90°-x)}$

Deuxième partie : les formules

Dans cette partie, Stevin démontre plusieurs formules de trigonométrie sphérique. Nous allons les présenter et détailler quelques-unes des démonstrations.

La formule des sinus dans les triangles sphériques rectangles

Théorème XXIII *: Dans un triangle sphérique rectangle, le sinus de l'angle droit est au sinus de l'hypoténuse comme le sinus de l'angle oblique au sinus du côté opposé.*

Stevin démontre ce théorème en considérant les trois cas suivants :

1) Les deux côtés de l'angle droit sont inférieurs à un quart de grand cercle.
2) Les deux côtés de l'angle droit sont supérieurs à un quart de grand cercle.
3) L'un des côtés de l'angle droit est inférieur à un grand cercle et l'autre plus grand.

Il explique enfin qu'il n'est pas nécessaire de considérer le cas très particulier ou l'un, voire les deux côtés de l'angle droit est égal à un quart de grand cercle, car alors l'angle opposé est nécessairement droit ; et le triangle rectangle est alors isocèle, ou équilatéral, avec deux (ou trois) angles droits ; le troisième angle est égal à son côté opposé.

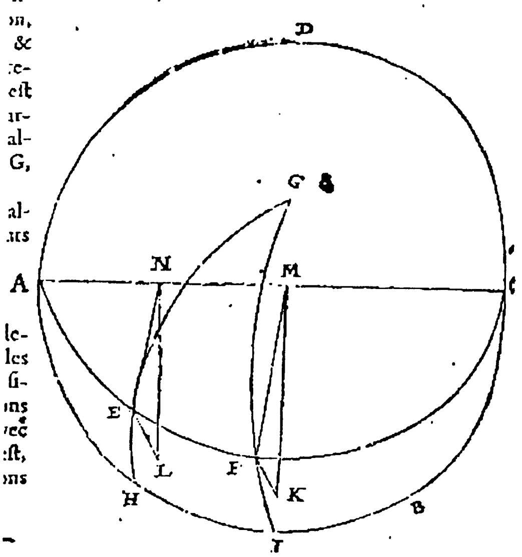
[5] Inversement

Pour démontrer les deux derniers cas, il se ramène au premier en utilisant les propriétés de la première partie, et le fait que par définition même des sinus, deux angles supplémentaires ont même sinus.

Examinons la démonstration du premier cas.

1 Exemple avec deux costez d'un angle droit, chacun plus petit que le quart d'un cercle.

Le donné. Soit ABCD cercle majeur d'une sphere, sur laquelle soit encores tiré un autre cercle majeur AEFC, & la commune section de ces deux cercles soit l'axe



AC : Apres soit G pole du cercle ABCD, duquel pole est tiré l'arc GH jusques au cercle ABCD, coupant le cercle AEFC en E : Ce qui estant ainsi, nous avons un triangle rectangle EHA, avec deux costez EH, HA, qui comprennent l'angle droit EHA, chacun plus petit que le quart d'un cercle.

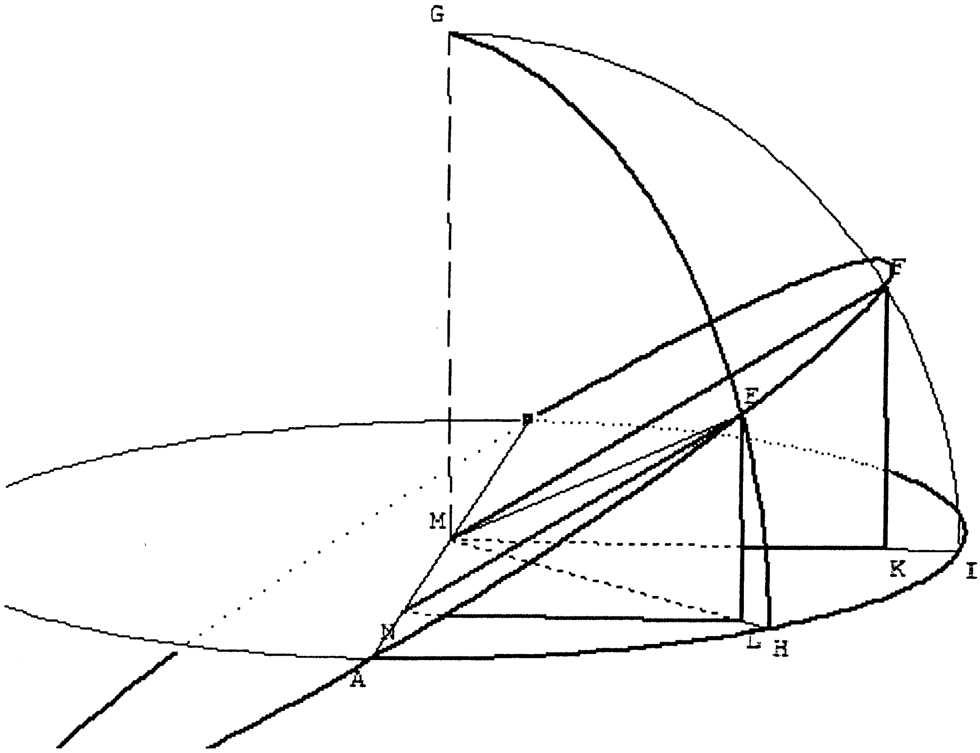
Le requis. Il faut demonstrer, que comme le sinus de l'angle droit EHA, au sinus de l'hypothenuse AE, ainsi le sinus de l'angle oblique EAH, au sinus de son costé opposite EH.

Preparation. Soit marqué le poinct I, ainsi que AI est le quart d'un cercle : Puis l'arc GI, lequel coupant le cercle AEFC en F, il faut que AF soit aussi le quart d'un cercle : Soient tirees maintenant les deux lignes droites FK, EL, à angle droit sur le plan du cercle ABCD, à sçavoir FK comme sinus de l'arc FI, qui est de l'angle FAI ou EAH : Et EL comme sinus de l'arc EH, qui est costé opposite de l'angle EAH : Puis apres au plan du cercle AEFC, les deux lignes droites FM, EN, toutes deux à angle droit sur l'axe AC, à sçavoir FM comme sinus de l'arc AF, qui est de l'angle droit, & EN comme sinus de l'arc AE estant l'hypothenuse : Soient aussi tirées les deux lignes droites KM, LM : Or donc FM, EN, FK, EL, signifians ainsi par ordre les quatre termes de ceste proposition, à sçavoir les quatre sinus du triangle EHA : Comme FM sinus de l'angle droit, EN sinus de l'hypothenuse, FK sinus de l'angle oblique, & EL sinus de son costé opposite, nous demonstrerons (pour plus amplement declarer le susdit requis), que comme FM à EN, ainsi FK à EL.

DEMONSTRATION.

Veu que FK, EL, sont toutes deux paralleles sur le plan du cercle ABCD, par la preparation, les trois triangles FKM, ELN, sont tous deux à angle droit sur le plan du mesme cercle ABCD, & leurs bases KM, LN, sont pourtant aussi paralleles, & l'angle ENL egal à l'angle FMK : Apres, les angles ELN, FKM, sont tous deux droits, par lequel aussi leurs troisiesmes angles E, F, sont egaux & consequemment s'ensuit qu'il faut que ce soient triangles semblables, dont les costez homologues sont proportionnels qui est, comme FM à EN, ainsi FK à EL, lesquels est (?) par ordre les sinus des quatre termes mentionnez en la proposition, comme dessus plus amplement declaré en la preparation, il appert que comme le sinus de l'angle droit FM, au sinus de l'hypothenuse EN, ainsi FK sinus de l'angle oblique, à EL sinus de son costé opposite.

La démonstration repose sur la figure ci-dessus, où la sphère est vue de dessus. Pour une meilleure lisibilité nous proposons une figure en vue latérale face au point *A*, réalisée avec Géospace.



Le triangle sphérique rectangle est *AHE* rectangle en *H*. Il s'inscrit dans un quart de demi-sphère de centre *M*. Les sinus des angles et côtés de ce triangle, sont, selon les définitions en vigueur à l'époque des longueurs de segments construits sur la figure ci-dessus.

$$\sin \widehat{A} = \sin\left(\widehat{FI}\right) = \sin\left(\widehat{FMI}\right) = FK$$

$$\sin\left(\widehat{EH}\right) = \sin\left(\widehat{EMH}\right) = EL$$

$$\sin\left(\widehat{AE}\right) = \sin \widehat{AME} = EN$$

le sinus de l'angle droit est le rayon de la sphère *MF*.

Par construction, le triangle *FKM* est rectangle en *K* ; le triangle *ELN* est rectangle en *L* ; les segments *LN* et *KM* sont parallèles car tous deux perpendiculaires au rayon *MA* ; les segments *FK* et *EL* sont parallèles car tous deux perpendiculaires au plan du grand cercle *AH* ; les triangles *FKM* et *ELN* sont par conséquent semblables et on en déduit $\frac{FM}{FK} = \frac{EN}{EL}$ puis $\frac{FM}{EN} = \frac{FK}{EL}$ ce qui achève la démonstration.

Examinons la démonstration du deuxième cas.

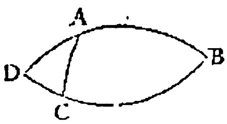
2 *Exemple avec deux costez d'un angle droit, chacun plus grand que le quart d'un cercle.*

Le donné. Soit ABC un triangle sphérique dont l'angle B est droit, & les deux costez comprenant iceluy, comme AB, CB, sont chacun plus grand que le quart d'un cercle. *Le requis.* Il faut demonstrer que comme le sinus de l'angle droit, au sinus de l'hypothenuse AC, ainsi le sinus de l'angle oblique ACB, au sinus de son costé opposite AB.

Preparation. Soient prolongez BA, BC, jusques à ce qu'ils se rencontrent, ce qui soit en D.

DEMONSTRATION.

DAB & DCB sont chacun un demicercle, & l'angle D est egal à l'angle B, par la 5 consequence de la 1 proposition, mais l'angle B est droit, parquoi l'angle D est droit aussi: Apres veu que AB, BC, sont chacun plus grand que le quart d'un cercle, il faut que AD, CD, soient chacun plus petit: Tellement que nous avons un triangle rectangle ADC, dont l'angle D est droit, avec deux costez d'angle droit AD, DC, qui sont chacun plus petit: parquoi par le 1 exemple de ceste proposition,



Comme le sinus de l'angle droit D,
Au sinus de l'hypothenuse AC;
Ainsi le sinus de l'angle oblique ACD,
Au sinus de son costé opposite AD.

Mais le sinus de D, est aussi sinus de B, puis qu'ils sont tous deux droits, par la 5 consequence de la 1 proposition: Et le sinus de l'angle ACD, est aussi sinus de l'angle ACB par la 5 consequence de la 1 proposition: Et le sinus de AD, est aussi sinus de AB, par la 2 definition de la fabrique des sinus; parquoi,

Comme le sinus de l'angle droit B,
Au sinus de l'hypothenuse AC;
Ainsi le sinus de l'angle oblique ACB,
Au sinus de son costé opposite AB.

. . . .

Les côtés de l'angle droit du triangle sphérique *ABC* rectangle en *B* dépassent un quart de grand cercle. Stevin prolonge ces deux côtés et construit ainsi un deuxième triangle sphérique *ACD*, rectangle en *D* dont les deux côtés de l'angle droit sont les supplémentaires des précédents, et donc inférieurs à un quart de cercle. Le résultat montré auparavant s'applique au triangle sphérique rectangle *ACD*.

On a donc dans le petit triangle rectangle en *D* $\dfrac{\sin\left(\widehat{D}\right)}{\sin\left(\widehat{AC}\right)} = \dfrac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{\sin\left(\widehat{AD}\right)}$;

Mais, $\widehat{D} = \widehat{B}$ en vertu d'une conséquence du théorème I de la première partie, donc $\sin\left(\widehat{D}\right) = \sin\left(\widehat{B}\right)$; les sinus d'angles supplémentaires sont égaux, donc $\sin\left(\widehat{ACD}\right) = \sin\left(\widehat{ACB}\right)$; $\sin\left(\widehat{AD}\right) = \sin\left(\widehat{AB}\right)$ ce qui achève la démonstration du second cas.

Examinons la démonstration du troisième cas.

3 *Exemple avec deux costez d'un angle droit, l'un plus petit, l'autre plus grand que le quart d'un cercle.*

Le donné. Soit ABC du deuxiesme exemple un triangle sphérique, dont l'angle C est droit, & l'un des deux costez de l'angle droit comme AC soit plus petit que le quart d'un cercle. l'autre, à sçavoir CB plus grand.

Le requis. Il faut demonstrer, que comme le sinus de l'angle droit ACB, au sinus de l'hypothenuse AB: Ainsi le sinus de l'angle oblique B, au sinus de son costé opposite AC.

Preparation. Soient BA, BC prolongez jusques à ce qu'ils se rencontrent, ce qui soit en D.

DEMONSTRATION.

DAB & DCB sont chacun un demicercle par la 3 consequence de la 1 proposition: Et veu que l'un des costez de l'angle droit AC, est plus petit que le quart d'un cercle. l'autre, à sçavoir BC plus grand, il faut que l'hypothenuse AB soit plus grande, par la 3 proposition: parquoi AB, BC, estant chacun plus grand, il faut que AD, CD, soient chacun plus petit: Et l'angle ACB estant droit, il faut que l'angle ACD soit aussi droit par la 5 consequence de la 1 proposition: Tellement que nous avons ici un triangle rectangle ACD, dont l'angle C est droit. & les deux comprenant icelui, chacun plus petit que le quart d'un cercle: parquoi par le 1 exemple,

Comme le sinus de l'angle ACD,
Au sinus de l'hypothenuse AD;
Ainsi le sinus de l'angle oblique D,
Au sinus de son costé opposite AC.

Mais le sinus de ACD, est aussi sinus de l'angle ACB, puis qu'ils sont tous deux droits, par la 5 consequence de la 1 proposition: Et le sinus de l'hypothenuse AD, est aussi sinus de AB, par la 2 definition de la fabrique des sinus: Et le sinus de D est aussi sinus de B, par la 3 consequence de la 1 proposition: parquoi,

Comme le sinus de l'angle droit ACB,
Au sinus de l'hypothenuse AB;
Ainsi le sinus de l'angle oblique B,
Au sinus de son costé opposite AC.

Conclusion. Estant doncques un triangle sphérique rectangle: Comme le sinus de l'angle droit, au sinus de l'hypothenuse, ainsi le sinus de l'angle oblique, au sinus de son costé opposite: ce qu'il falloit demonstrer.

Pour démontrer le troisième cas Stevin reprend la figure ci-dessus en supposant cette fois que le triangle sphérique ABC est rectangle en C ; le côté $\widehat{BC}$ dépasse un quart de grand cercle et le côté $\widehat{AC}$ est inférieur à un quart de grand cercle. Le triangle sphérique ADC construit selon le même protocole que dans le cas précédent est alors un triangle sphérique rectangle en C.

Dans ce triangle le côté $\widehat{CD}$, supplémentaire de $\widehat{BC}$ est inférieur à un quart de cercle, le côté $\widehat{AC}$ aussi. On a donc d'après le premier cas, $\dfrac{\sin\left(\widehat{ACD}\right)}{\sin\left(\widehat{AD}\right)} = \dfrac{\sin\left(\widehat{D}\right)}{\sin\left(\widehat{AC}\right)}$; mais par ailleurs, $\sin\left(\widehat{ACD}\right) = \sin\left(\widehat{ACB}\right)$; $\sin\left(\widehat{AD}\right) = \sin\left(\widehat{AB}\right)$; $\sin\left(\widehat{D}\right) = \sin\left(\widehat{B}\right)$; ce qui achève la démonstration.

Formule des sinus dans les triangles sphériques quelconques

Théorème XXIV : *Dans un triangle sphérique le sinus du coté $\widehat{AB}$ est au sinus du côté $\widehat{AC}$ comme le sinus de l'angle $\widehat{C}$ au sinus de l'angle $\widehat{B}$.*

Stevin démontre ce théorème en considérant les deux cas suivants :

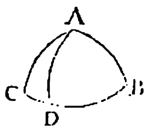
1) La hauteur issue de A est à l'intérieur du triangle.
2) La hauteur issue de A est à l'extérieur du triangle.

Et il utilise le résultat précédent (Théorème XXIII) démontré dans les triangles sphériques rectangles.

Examinons la démonstration du premier cas.

1 Exemple où la perpendiculaire tombe dedans le triangle.

Le donné. Soit A B C un triangle ſpherique, comme il advient, je prens ſans aucun angle droit, dont le coſté dextre ſoit A B, coſté ſeneſtre A C, angle ſeneſtre C, angle dextre B.



Le requis. Il faut demonſtrer, que comme le ſinus du coſté dextre AB, au ſinus du coſté ſeneſtre AC, ainſi le ſinus de l'angle ſeneſtre C, au ſinus de l'angle dextre B.

Preparation. Soit tiré l'arc A D tombant, je prens dedans le triangle A B C, à angle droit ſur C B, qui eſt, partiſſant le meſme triangle en deux triangles rectangles A D B, A D C.

DEMONSTRATION.

Veu que l'angle D du triangle A D B eſt droit, je dis par raiſon alterne de la 23 propoſition:

Comme le ſinus de l'hypothenuſe A B,
Au ſinus de A D;
Ainſi le ſinus de l'angle droit A D B,
Au ſinus de l'angle oppoſite de A D, qui eſt de l'angle B.

Apres, puis que l'angle D du triangle A D C eſt auſſi droit, je dis par raiſon alterne de la 23 propoſition, que

Comme le ſinus de l'hypothenuſe A C,
Au ſinus de A D;
Ainſi le ſinus de l'angle droit A D C.
Au ſinus de l'angle oppoſite de A D, qui eſt l'angle C.

Nous avons doncques ici deux proportions de ſinus de ces termes:

A B, A D, D, B,
A C, A D, D, C.

Ce qui eſtant ainſi, le rectangle compris entre les ſinus de AD & D, eſt egal au rectangle compris ſous les ſinus de AB & B, auſſi ſous les ſinus de AC & C, parquoi l'angle droit comprins ſous les ſinus de AB & B, eſt egal à l'angle droit compris ſous les ſinus de AC & C, & leurs coſtez ſont alternement proportionnels, qui eſt,

Comme le ſinus de A B,
Au ſinus de A C,
Ainſi le ſinus de C,
Au ſinus de B.

Qui eſt:

Comme le ſinus du coſté dextre A B,
Au ſinus du coſté ſeneſtre A C;
Ainſi le ſinus de l'angle ſeneſtre C,
Au ſinus de l'angle dextre B.

En langage moderne cela donne :

$$\frac{\sin\left(\widehat{AB}\right)}{\sin\left(\widehat{AD}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{ADB}\right)}{\sin\left(\widehat{B}\right)}$$ dans le triangle sphérique rectangle ADB ;

$$\frac{\sin\left(\widehat{AC}\right)}{\sin\left(\widehat{AD}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{ADC}\right)}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$ dans le triangle sphérique rectangle ADC.

Mais $\sin\left(\widehat{ADB}\right) = \sin\left(\widehat{ADC}\right)$ = sinus de l'angle droit.

On a donc

$$\sin\left(\widehat{ADB}\right)\sin\left(\widehat{AD}\right) = \sin\left(\widehat{AB}\right)\sin\left(\widehat{B}\right) =$$

ce qui prouve le résultat.

La démonstration est du même type dans le deuxième cas.

Autres formules dans un triangle sphérique rectangle

***Théorème XXV** : Dans un triangle sphérique rectangle en B, le sinus de l'angle droit est au sinus de l'arc de complément d'un côté de l'angle droit comme le sinus de l'arc de complément de l'autre côté de l'angle droit au sinus de l'arc de complément de l'hypoténuse.*

C'est autrement dit la formule (1') du chapitre précédent à savoir : cos(*hypoténuse*) = cos(*côté*) × cos(*côte*).

A nouveau, Stevin démontre ce théorème en considérant les trois cas suivants :

1) Les deux côtés de l'angle droit sont inférieurs à un quart de grand cercle.
2) Les deux côtés de l'angle droit sont supérieurs à un quart de grand cercle.

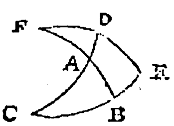
3) L’un des côtés de l’angle droit est inférieur à un grand cercle et l’autre plus grand.

Examinons la démonstration du premier cas :

1 *Exemple avec deux costez de l'angle droit, chacun plus petit que le quart d'un cercle.*

Le donné. Soit A B C un triangle spherique, dont l'angle B est droit, & les deux costez de l'angle comme A B, B C, chacun plus petit que le quart d'un cercle.

Le requis. Il faut demonstrer, que comme le sinus de l'angle droit, au sinus de l'arc de complement d'un costé de l'angle droit, je prens de C B, ainsi le sinus de l'arc de cõplement de l'autre costé de l'angle droit A B, au sinus de l'arc de complement de l'hypothenuse A C.



Preparation. Veu que les deux costez de l'angle droit AB BC, sont chacun plus petit que le quart d'un cercle, il faut que l'hypothenuse A C soit aussi plus petite par la 3 proposition : parquoi soit prolongé aussi bien C A que B A, & C B jusques à ce qu'ils facent chacun le quart d'un cercle, ce qui soit C A jusques à D, C B jusques à E, & B A jusques à F, puis apres soit prolongé de E par dessus D un arc jusques à ce qu'il fasse aussi le quart d'un cercle, qui tombera necessairement de E jusques à F, par la 4 consequence de la 1 proposition.

DEMONSTRATION.

Veu que l'angle F B C est droit, & que F E fait le quart d'un cercle aussi bien que F B, il faut que l'angle F E C soit aussi droit par la 2 consequence de la 1 proposition. Apres, puis que C E fait le quart d'un cercle, & que l'arc C D est tiré sur E F, il faut que le mesme, par la precedente consequence, soit à angle droit sur icelui E F, & consequemment que l'angle C D F soit droit : parquoi par la 23 proposition.

Comme le sinus de l'angle droit A D F,
Au sinus de l'hypothenuse A F;
Ainsi le sinus de l'angle oblique F,
Au sinus de son costé oppotite A D.

Mais le sinus de B E, est sinus de l'angle F par la 2 definition : parquoi

Comme le sinus de l'angle droit A D F,
Au sinus de l'hypothenuse A F;
Ainsi le sinus de B E,
Au sinus de A D.

Mais A F est arc de complement de A B, & B E arc de complement de C B, & A D arc de complement de A C : parquoi

Comme le sinus de l'angle droit,
Au sinus de l'arc de complement A B;
Ainsi le sinus de l'arc de complement de C D,
Au sinus de l'arc de complement de A C.

Et par alterne raison,

Comme le sinus de l'angle droit,
Au sinus de l'arc de complement du costé de l'angle droit C B;
Ainsi le sinus de l'arc de complement de l'autre costé de l'angle droit A B,
Au sinus de l'arc de complement de l'hypothenuse A C.

Stevin prolonge chacun des trois côtés du triangle sphérique *ABC* rectangle en *B* de sorte que $\overset{\frown}{BF}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{CE}$ sont égaux à un quart de grand cercle. *F* étant le pôle de l’arc $\overset{\frown}{CE}$ il en déduit que $\overset{\frown}{FE}$ est aussi égal à un quart de grand cercle. Ainsi les angles $\widehat{CEF}$ et $\widehat{CDF}$ sont droits.

Il applique le théorème XXIII au triangle sphérique *AFD* rectangle en *D*.

$$\frac{\sin\left(\widehat{ADF}\right)}{\sin\left(\overset{\frown}{AF}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{F}\right)}{\sin\left(\overset{\frown}{AD}\right)} = \frac{\sin\left(\overset{\frown}{EB}\right)}{\sin\left(\overset{\frown}{AD}\right)}$$, ce qui achève la démonstration, les arcs $\overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{EB}$ et $\overset{\frown}{AD}$ étant les complémentaires des côtés du triangle *ABC*.

La démonstration des deux autres cas se fait comme dans celle du théorème XXIII en considérant le petit triangle rectangle « supplémentaire » de *ABC*.

***Théorème XXVI** : Dans un triangle sphérique rectangle en B le sinus d'un angle oblique est au sinus de l'angle droit comme le sinus de l'angle de complément de l'autre angle oblique au sinus de l'arc de complément de son côté opposé.*
Ce qui se traduit en langage moderne par la formule suivante :
$\dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\sin(90°)} = \dfrac{\sin\left(90° - \widehat{C}\right)}{\sin\left(90° - \widehat{AB}\right)}$; cela correspond à la formule (5') à savoir

$\cos\widehat{C} = \sin\widehat{A}\cos c$, du chapitre précédent.

Stevin démontre ce théorème en considérant les trois cas suivants

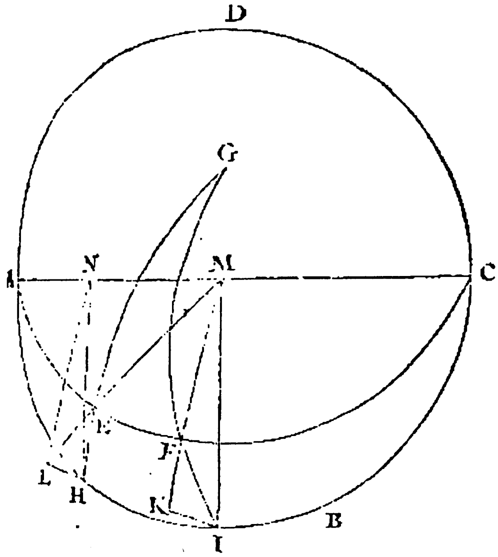
1) Les deux angles autres que le droit sont aigus.
2) Les deux angles autres que le droit sont obtus.
3) L'un des deux angles autres que le droit est aigu, l'autre obtus.

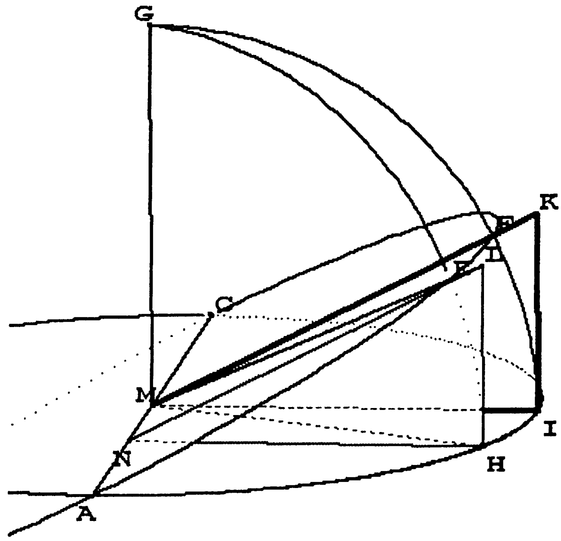
Il procède comme pour le théorème précédent. Dans le premier cas il sait, d'après les résultats de la première partie que les côtés de l'angle droit, et l'hypoténuse du triangle sphérique sont inférieurs à un quart de grand cercle. Il peut donc les prolonger jusqu'à obtenir un quart de grand cercle. Il obtient la même figure que celle du premier cas du théorème XXV ; il applique alors au triangle rectangle *AFD* le théorème XXIII. Dans les deux autres cas il considère le triangle sphérique « supplémentaire ».

***Théorème XXVII** : Dans un triangle sphérique AEH rectangle en H le sinus de l'angle droit est au sinus d'un côté de l'angle droit comme la tangente de l'angle oblique touchant le côté de l'angle droit à la tangente de l'autre côté de l'angle droit.*
Ce qui se traduit en langage moderne par la formule suivante :
$\dfrac{\sin(90°)}{\sin\left(\widehat{AH}\right)} = \dfrac{\tan\left(\widehat{A}\right)}{\tan\left(\widehat{EH}\right)}$; cela correspond à la formule (2'') du chapitre précédent, à

savoir ici $\tan a = \tan\widehat{A}\sin e$.

La démonstration est du même type que celle du théorème XXIII et se décompose en trois cas. Pour le premier cas (les deux côtés de l'angle droit sont inférieurs à un quart de grand cercle) il raisonne sur la figure ci-dessous. Une version moderne avec Géospace est donnée.





$\sin(90°) = MI$

$\sin\left(\widehat{AH}\right) = \sin \widehat{AMH}\ NH$

$\tan\left(\widehat{FI}\right) = \tan\left(\widehat{A}\right) = IK$

$\tan\left(\widehat{EH}\right) = HL$

Le résultat découle du fait que les triangles *NHL* et *MIK* sont semblables.
Les deux autres cas sont démontrés à l'aide du triangle sphérique « supplémentaire ».

***Théorème XXVIII** : Dans un triangle sphérique ABC rectangle en B le sinus de l'angle droit est à la tangente de l'hypoténuse comme le sinus du complément de l'angle oblique à la tangente du côté de l'angle droit touchant cet angle oblique.*
Ce qui se traduit en langage moderne par la formule suivante :

$\dfrac{\sin(90°)}{\tan\left(\widehat{AC}\right)} = \dfrac{\sin\left(90° - \widehat{C}\right)}{\tan\left(\widehat{BC}\right)}$; cela correspond à la formule (2') du chapitre précédent, à savoir ici $\tan a = \tan b \cos \widehat{C}$.

***Théorème XXIX** : Dans un triangle sphérique ABC rectangle en B le sinus de l'angle droit est au sinus de l'arc de complément de l'hypoténuse comme la tangente d'un angle oblique à la tangente de l'angle de complément de l'autre angle oblique.*
Ce qui se traduit en langage moderne par la formule suivante :

$\dfrac{\sin(90°)}{\sin\left(90° - \widehat{AC}\right)} = \dfrac{\tan\left(\widehat{C}\right)}{\tan\left(90° - \widehat{A}\right)}$; cela correspond à la formule (4') du chapitre précédent, à savoir ici $\cos b = \cot \widehat{A} \cot \widehat{C}$.

Ces deux théorèmes XXVIII et XXIX se démontrent comme conséquence du théorème XXVII et les démonstrations se font en considérant les trois cas habituels.

Formule des « cosinus »

Les deux derniers théorèmes énoncés et démontrés par Stevin ont un énoncé plus abscons qui fait appel au verse d'un arc ou d'un angle. Le théorème XXX correspond à « notre » formule des cosinus et le théorème XXXI correspond à « notre formule duale des cosinus.

***Théorème XXX** : Dans un triangle sphérique, le rectangle compris sous deux sinus de deux côtés est au carré du sinus du rectangle comme la différence des deux verses, dont l'un est verse de la différence de ces deux côtés, l'autre verse du troisième côté est au verse de l'angle compris sous les deux premiers côtés.*

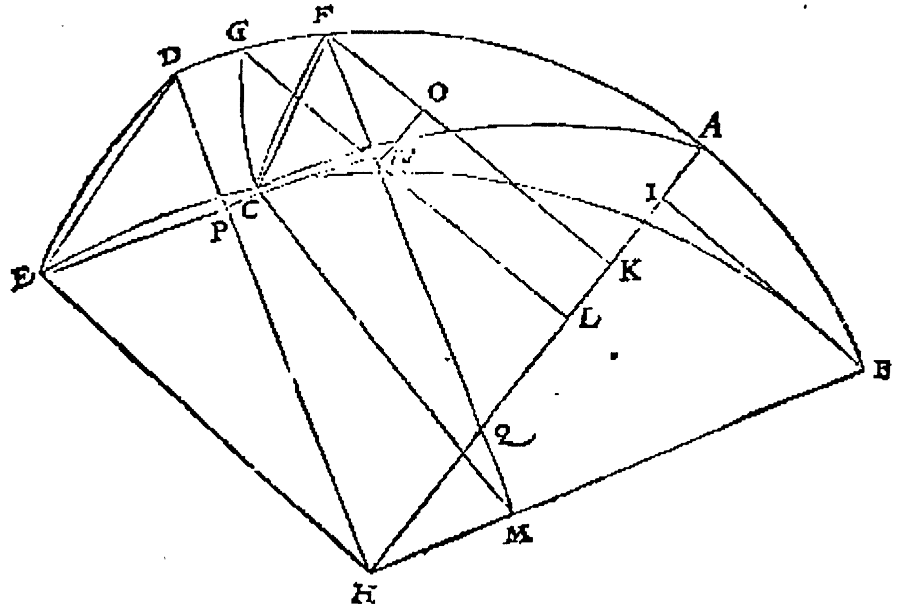
Ce qui se traduit en langage moderne par la formule suivante :
$\dfrac{\sin\left(\widehat{AB}\right)\sin\left(\widehat{BC}\right)}{\sin(90°)\sin(90°)}=\dfrac{\text{verse}\left(\widehat{AC}\right)-\text{verse}\left(\widehat{AB}-\widehat{BC}\right)}{\text{verse}\left(\widehat{B}\right)}$; cela correspond à la formule des cosinus du chapitre précédent, comme nous allons le voir.

Réécrivons la formule ci-dessus en utilisant les notations du chapitre précédent, et la traduction moderne du verse. On obtient alors :
$\sin c \sin a=\dfrac{(1-\cos b)-(1-\cos(c-a))}{1-\cos\left(\widehat{B}\right)}$, ce qui donne

$\sin c \sin a-\sin c \sin a \cos\left(\widehat{B}\right)=\cos(c-a)-\cos b$ puis

$\cos b=\cos c \cos a+\sin c \sin a \cos\left(\widehat{B}\right)$.

La démonstration de ce théorème est longue ; la figure, donnée ci-dessous, est compliquée, du fait qu'elle doit faire apparaître les lignes trigonométriques mentionnées dans le théorème. Seule la démonstration du cas où les trois côtés du triangle sphérique sont inégaux et inférieurs à un quart de grand cercle est présentée. Elle occupe deux pages. La *préparation* de la démonstration nécessite neuf *articles*, et la *démonstration* en nécessite trois.



***Théorème XXXI** : Soit un triangle sphérique ayant deux ou trois angles aigus.*
1) Le rectangle sous les sinus des deux moindres angles est au carré du sinus de l'angle droit comme la différence des deux verses dont l'un est verse de la différence de ces deux moindres angles, et l'autre est verse de la différence du demi cercle et du troisième angle, est au verse de la différence du demi cercle et du côté opposé à ce troisième angle.
2) Le rectangle compris sous le sinus du plus grand angle et un des moindres est au carré du sinus de l'angle droit comme la différence des deux verses dont l'un est verse de la différence du demi cercle et de ces deux angles ensemble, et l'autre est verse du troisième angle, est au verse du côté opposé à ce troisième angle.

Traduisons en langage moderne ces propositions. On appelle ABC le triangle sphérique. On considère, comme le fait Stevin, que les deux moindres angles sont ceux de sommets A et C ; le premier résultat se formule alors ainsi :

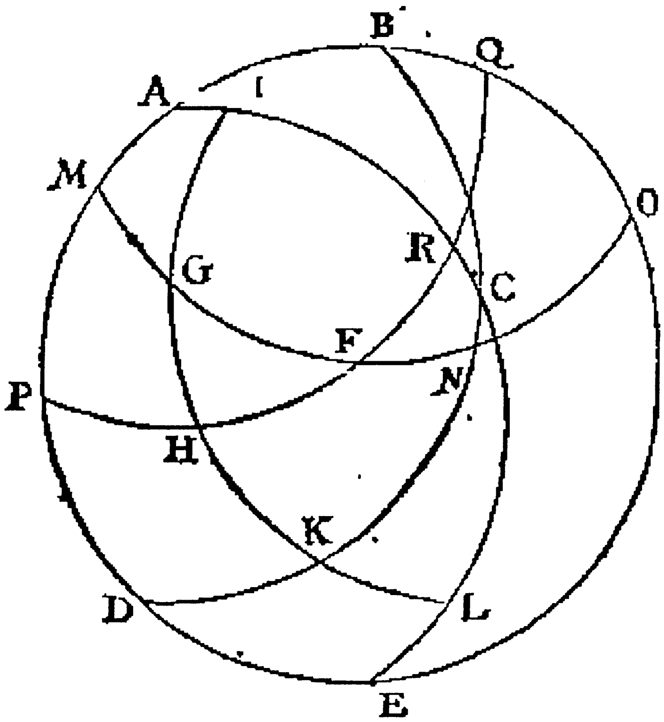
$\dfrac{\sin(\widehat{A})\sin(\widehat{C})}{\sin(90°)\sin(90°)} = \dfrac{\operatorname{verse}(180° - \widehat{B}) - \operatorname{verse}(\widehat{A} - \widehat{C})}{\operatorname{verse}(180° - \widehat{AC})}$ et si l'on traduit cela en utilisant les notations du premier chapitre on obtient après quelques calculs sans difficulté $\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{C}) + \sin(\widehat{A})\sin(\widehat{C})\cos b$.

Le second résultat se formule ainsi :

$\dfrac{\sin(\widehat{B})\sin(\widehat{A})}{\sin(90°)\sin(90°)} = \dfrac{\operatorname{verse}(\widehat{C}) - \operatorname{verse}(180° - (\widehat{B} + \widehat{A}))}{\operatorname{verse}(180° - \widehat{AB})}$, ce qui conduit à

$\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) + \sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B})\cos c$.

On peut s'étonner que Stevin énonce ici deux résultats, qui correspondent pour nous à une seule formule (en réalité trois déduites les unes des autres par permutation). Il ne faut cependant pas perdre de vue que les différences mentionnées dans ces théorèmes sont nécessairement des différences entre deux quantités, la première plus grande que la seconde. D'où la nécessité de distinguer des cas.
Stevin attribue ce théorème à Philippus Lansbergius. (*Ce théorème que je transforme selon mon style ordinaire est inventé par le très docte Seigneur Philippus Lansbergius*)
La démonstration occupe trois pages et s'appuie sur la figure particulièrement ardue donnée ci-dessous. Elle nécessite dix *membres* (résultats liminaires) et utilise le théorème XXX précédent.

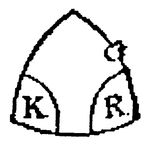


Troisième partie : résolution des triangles sphériques

Dans cette partie Stevin donne des exemples de résolution de triangles sphériques. Il procède avec méthode, considérant dans un premier temps la résolution de triangles sphériques avec un angle droit, puis dans un second temps la résolution de triangles sphériques avec un côté droit, et enfin il envisage la résolution des triangles sphériques quelconques. Un triangle a trois angles et trois côtés ; ces six nombres sont appelés *termes* par Stevin. Il montre que dès lors que l'on connaît trois des six termes d'un triangle, on peut trouver les trois autres.

Pour faciliter la lecture il utilise une notation très astucieuse de ses figures. Les trois termes connus (côté ou angle) sont codés à l'aide d'une des trois lettres *R*, *K*, ou *G* ; *R* signifie que le côté ou l'angle ainsi codé est droit (rectangle) ; *K* signifie que le côté ou l'angle ainsi codé est aigu (*klein* veut dire petit) ; *G* signifie que le côté ou l'angle ainsi codé est obtus (grand). Les membres connus sont repassés en pointillés sur la figure.

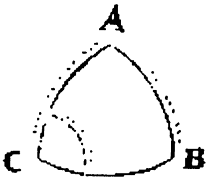
Vn triangle sphærique, avec deux angles cognus, l'un droit l'autre aigu, & un costé cognu de l'angle droit, plus grand que le quart d'un cercle, à l'opposite de l'angle aigu cognu.



Ceste briefveté entre autres, servira de beaucoup quand on veut trouver par les trois termes cognus d'un triangle, les autres trois, ou un d'iceux: Car tels triangles marquez, s'assembleront ci apres comme en une table appellée *Indice des Triangles*, d'autant que par icelui on a une adresse pour trouver facilement en ceste; partie un semblable exemple qu'on veut imiter, sans qu'il faille charger ou troubler l'esprit d'aucunes des precedentes reigles; Lequel *Indice des Triangles* sera plus amplement descrit & declaré à la fin de ce livre.

...

Les trois termes cognus, dit en general, sont de ceste qualité.

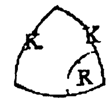


En laquelle figure, selon plus ample declaration faite à la Note de la 22 proposition, l'arc poinćté de l'angle C signifie l'angle oblique donné, les arcs poinćtez A B. A C, signifient les deux costez cognus comprennant l'angle incognu A: Mais B est l'angle incognu qui touche le costé incognu B C: Et veu que ci apres il nous faudra souvent nommer ces quatre termes C, A B A C, B, pour la briefveté nous les denoterons par les susdites lettres A, B, C.

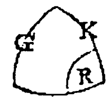
Il conclut cette partie par une table récapitulant tous les cas possibles et qui renvoie aux pages du livre dans lesquelles sont traités les exemples correspondants.

TRIANGLES SPHERIQVES DV PREMIER MEMBRE AVEC *rectangles cognus donnez.*

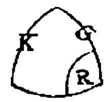
Page 52 le 1 exemple de la 32 proposition.



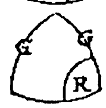
Page 52 le 2 exemple de la 32 proposition.



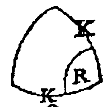
Page 53 le 3 exemple de la 32 proposition.



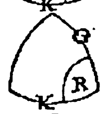
Page 53 le 4 exemple de la 32 proposition.



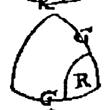
Page 55 le 1 exemple de la 33 proposition.



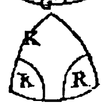
Page 55 le 2 exemple de la 33 proposition.



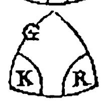
Page 55 le 3 exemple de la 33 proposition.



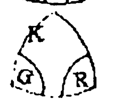
Page 57 le 1 exemple de la 34 proposition.



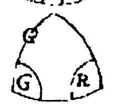
Page 57 le 2 exemple de la 34 proposition.



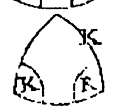
Page 57 le 3 exemple de la 34 proposition.



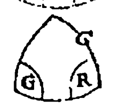
Page 58 le 4 exemple de la 34 proposition.



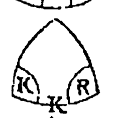
Page 59 le 1 exemple de la 35 proposition.



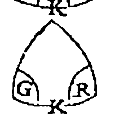
Page 59 le 1 exemple de la 35 proposition.



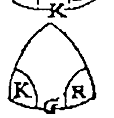
Page 61 le 1 exemple de la 36 proposition.



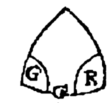
Page 61 le 2 exemple de la 36 proposition.



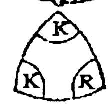
Page 62 le 3 exemple de la 36 proposition.



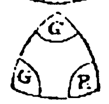
Page 62 le 4 exemple de la 36 proposition.



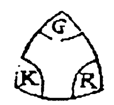
Page 64 le 1 exemple de la 37 proposition.



Page 64 le 2 exemple de la 37 proposition.

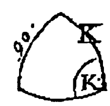


Page 64 le 3 exemple de la 37 proposition.

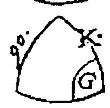


TRIANGLES SPHERIQVES DV DEUXIESME MEMBRE AVEC UN *costé cognu donné de 90 degr. sans angle droit cognu.*

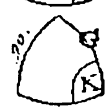
Page 66 le 1 exemple de la 38 proposition.



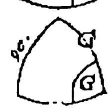
Page 66 le 1 exemple de la 38 proposition.



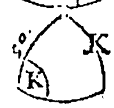
Page 67 le 2 exemple de la 38 proposition.



Page 67 le 2 exemple de la 38 proposition.

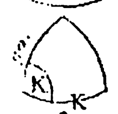


Page 67 le 3 exemple de la 38 proposition.

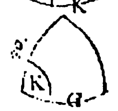


Page 68 le 4 exemple de la 38 proposition.

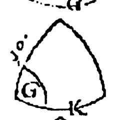
Page 68 le 5 exemple de la 38 proposition.



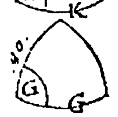
Page 68 le 5 exemple de la 38 proposition.



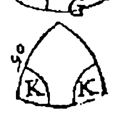
Page 69 le 6 exemple de la 38 proposition.



Page 69 le 6 exemple de la 38 proposition.

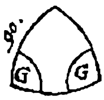


Page 69 le 7 exemple de la 38 proposition.

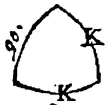


Page 69 le 7 exemple de la 38 proposition.

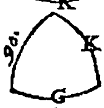
Page 70 le 8 exemple de la 38 proposition.



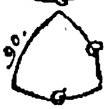
Page 70 le 8 exemple de la 38 proposition.



Page 71 le 9 exemple de la 38 proposition.

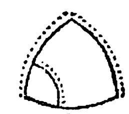


Page 71 le 9 exemple de la 38 proposition.

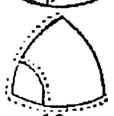


Page 71 le 10 exemple de la 38 proposition.

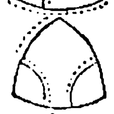
TRIANGLES SPHERIQVES DV TROISIESME MEMBRE SANS RECTANgle *cognu donné ou costé de 90 deg.*



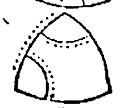
Page 72 à la 39 proposition, lisés premierement en la 72 page l'advertissement general declarant quel exemple il faut suivre.



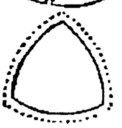
Page 78 à la 40 proposition.



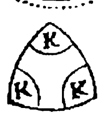
Page 80 à la 41 proposition.



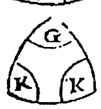
Page 82 à la 42 proposition.



Page 84 à la 43 proposition.



Page 85 le 1 exemple de la 44 proposition.



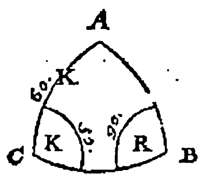
Page 85 le 1 exemple de la 44 proposition.

Page 85 le 2 exemple de la 44 proposition.

Page 85 le 2 exemple de la 44 proposition.

L'VSAGE DV PRECEDENT INDICE DES TRIANGLES SPHERIQVES.

SOient à trouver un ou plusieurs termes incognus de ce triangle ABC, dont l'angle B fait 90 deg. C 50 deg. A C 60 deg. Lequel B estant un angle droit, & A C un costé plus petit que le quart d'un cercle, & C un angle aigu, je mets à l'angle droit sa lettre signifiante R, sur A C la lettre K, & à l'autre angle aussi K (signifiant plus petit pour les raisons dites ailleurs) comme on voit. Or veu que ceci est un triangle rectangle, je cerche le semblable au 1 membre de l'indice des triangles, le trouvant là le 8 en l'ordre, où je voy qu'un semblable sera trouvé en la 57 page au 1 exemple de 34 proposition, parquoi icelle operation suivie, on vient au requis. Et ainsi avec tous autres. Notez encores qu'en tous les exemples des triangles rectangles, comme ceux du premier membre, nous avons denoté l'angle droit avec B, A C signifie par tout l'hypothenuse, AB & BC sont tousiours costez de l'angle droit: Mais s'il advenoit à quelqu'un qu'il fallut trouver les termes incognus d'un triangle marqué avec d'autres lettres, ou avec les mesmes autrement mises, il pourroit au lieu d'iceux (pour ne troubler l'esprit de diverses lettres d'une mesme signification) mettre B à l'angle droit, A en haut, C au troisiesme angle. Et si l'angle droit du triangle donné estoit à la main senestre, on le pourroit tourner jusques à ce qu'il vint à la main dextre. Ou bien marquer un autre triangle de telle disposition comme il est aux exemples.



Ce que nous avons dit ici du triangle rectangle, s'entendra aussi des autres triangles sans angle droit cognu, comme ceux du 2 & 3 membre, lesquels on pourra tousiours marquer avec des lettres, & rememe comme sont les exemples imitables dans le livre, & alors suivre l'operation non seulement de mot à mot, mais aussi de lettre à lettre.

Quant à ce que de la 40, & 41, & 42 proposition, toutes les diverses sortes qui s'y peuvent rencontrer, ne sont descrites chacune en particulier comme des autres propositions, cela a esté laissé comme n'estant point necessaire. Dequoi pour en parler par exemple, quelqu'un pourroit dire ainsi: Rencontrant un triangle de la qualité de la 40 proposition, en laquelle estant trois exemples, que sçay-je lequel des trois je suivrai premierement pour trouver les termes incognus? Là dessus je dis que quel exemple des trois qu'on prenne, on vient au requis. Comme par similitude je suive le 1 exemple, avec lequel estant venu en la preparation au dernier de l'ordre, là il y a escrit s'il faut que je continuë l'operation avec icelui 1 exemple, ou avec le 2, ou 3. Parquoi le reste achevé avec tel exemple, comme il me sera demonstré, je viens au requis. Mais si je commençois à suivre premierement un des autres deux exemples, j'y trouve aussi à la fin de la preparation semblable advertissement. Le mesme faut-il aussi entendre de la 41 & 42 proposition, là où aux preparations il y a tels advertissemens.

Il n'est pas question ici de traiter tous les exemples proposés par Stevin. Nous allons en choisir trois, un par partie et présenter en détail la résolution de Stevin. Ces mêmes exemples sont présentés dans le chapitre précédent et résolus avec les formules modernes. Les résultats donnés par Stevin sont les mêmes que ceux obtenus avec les moyens modernes, à la minute d'angle près.

Le cas des triangles sphériques rectangles

Le chapitre traitant des triangles sphériques rectangles se décompose en sept propositions selon les deux termes connus du triangle, en plus de l'angle droit. Pour chacune des propositions il passe en revue tous les cas de triangles sphériques rectangles pouvant se présenter et donne un exemple de chacun de ces cas, qu'il résout en présentant sous forme d'algorithme les calculs. Enfin il démontre la proposition, et justifie par là-même les réponses données dans les exemples, en se référant aux théorèmes de la partie précédente.

Dans la ***proposition 32***, sont supposés connus l'hypoténuse et un côté de l'angle droit.

Dans la ***proposition 33***, sont supposés connus les deux côtés de l'angle droit.

Dans la ***proposition 34***, sont supposés connus l'hypoténuse et un angle oblique.

Dans la ***proposition 35***, sont supposés connus un angle oblique et son côté opposé.

Dans la ***proposition 36***, sont supposés connus un angle oblique et son côté adjacent.

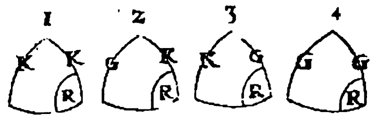
Dans la ***proposition 37***, sont supposés connus les deux angles obliques.

Examinons le tout premier exemple donné par Stevin qui illustre un des cas de la proposition 32.

PROBLEME I. PROPOSITION XXXII.

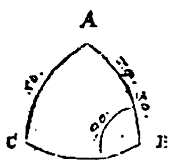
Eſtant cognu l'angle droit d'un triangle ſpherique rectangle, avec l'hypothenuſe, & un coſté de l'angle droit : Trouver le troiſieſme coſté & les autres deux angles.

Les trois termes cognûs ſe peuvent rencontrer de ces quatre diverſes ſortes :



Leſquels recevans quatre diverſes façons d'operation, nous mettrons de chacun un exemple particulier.

1. *Exemple du 1 triangle de ceſte qualité.*



Le donné. Soit A B C un triangle ſpherique, dont l'angle B eſt droit, & l'hypothenuſe A C fait 50 degr. mais A B 29 deg. 30 ①.

Le requis. Il faut trouver le troiſieſme coſté B C, avec les autres deux angles A, C.

OPERATION.

Invention du coſté B C.

Sinus de l'angle droit	10000.
Donne le ſinus de l'arc de complement du coſté de l'angle droit A B	8704.
Combien la ſecante de A C	15557?
Vient la ſecante	13541.
Dont l'arc pour la requiſe B C	42 deg. 24.

NOTEZ.

Au lieu de l'operation ci deſſus on pourroit par la 25 propoſition dire ainſi,

Le ſinus de l'arc de complement du coſté de l'angle droit A B	8704.
Donne le ſinus de l'arc de complement de l'hypothenuſe A C	6428.
Combien le ſinus de l'angle droit	10000?
Vient ſinus	7385.
Dont l'arc	47 deg. 36.
Souſtrait de	90 deg.
Reſte pour la requiſe B C	42 deg. 24.

Ce qui eſtant ainſi, quelqu'un pourroit penſer pourquoi on a prins la premiere operation au lieu de ceſte ſeconde, ou au lieu de pluſieurs autres operations, dont nous parlerons plus amplement en l'Appendice, par leſquelles le meſme coſté requis B C ſe peut trouver ? La raiſon eſt telle : En la premiere operation il y a multiplication du premier terme avec la troiſieſme, à ſçavoir 8704 avec 15557 : Et en la ſeconde operation, diviſion, à ſçavoir 64280000 par 8704 : Mais veu que multiplication n'eſt pas ſi difficile que diviſion, pourtant la premiere operation a eſté choiſie au lieu de la ſeconde, ou aucune autre.

Et ce que nous avons dit ici du premier exemple, s'entendra auſſi de tous les ſuivans, là où chacun terme incognu du triangle rectangle ſe trouvera par tout avec une multiplication : Et cela non ſeulement au triangle rectangle, mais auſſi au triangle oblique avec un coſté de 90 deg. Auſſi à chacun des deux triangles rectangles, auſquels ſe partit le triangle oblique, pour en trouver les termes incognus.

Invention de l'angle A.

Le ſinus de l'angle droit	10000.
Donne la tangente de l'hypothenuſe A C	11918.
Combien la tangente de l'arc de complement de A B	17675?
Vient la ſecante	21065.
L'arc d'icelui pour l'angle requis A	61 deg. 39.

Invention de l'angle C.

Le ſinus de l'angle droit	10000.
Donne la ſecante de l'arc de complement de l'hypothenuſe A C	13054.
Combien le ſinus de A B	4924?
Vient le ſinus	6428.
L'arc d'icelui pour l'angle requis C	40 deg.

Le triangle sphérique ABC est rectangle en B ; l'hypoténuse $\overset{\frown}{AC}$ vaut 50° ; et le côté $\overset{\frown}{AB}$ vaut 29°30'.

Première étape : calcul du côté $\overset{\frown}{BC}$

Stevin propose deux solutions qui utilisent le théorème XXV, c'est-à-dire l'égalité

$$\frac{\sin(90°)}{\sin\left(90° - \overset{\frown}{BA}\right)} = \frac{\sin\left(90° - \overset{\frown}{BC}\right)}{\sin\left(90° - \overset{\frown}{AC}\right)}.$$

Pour l'une des démonstrations, il utilise en plus le théorème XXII assure que $\dfrac{\sin\left(90° - \widehat{BC}\right)}{\sin\left(90° - \widehat{AC}\right)} = \dfrac{\sec\left(\widehat{AC}\right)}{\sec\left(\widehat{BC}\right)}$. D'où il déduit que $\dfrac{\sin(90°)}{\sin\left(90° - \widehat{BA}\right)} = \dfrac{\sec\left(\widehat{AC}\right)}{\sec\left(\widehat{BC}\right)}$ puis que $\sec\left(\widehat{BC}\right) = \dfrac{\sec(50°) \times \sin(60°30')}{\sin(90°)}$ et ce calcul ne nécessite qu'une seule multiplication. Voici les résultats :

$\sin(90°) = 10000$ $\sin\left(90° - \widehat{BA}\right) = \sin(60°30') = 8704$ $\sec\left(\widehat{AC}\right) = \sec(50°) = 15557$ $\sec\left(\widehat{BC}\right) = 13541$ $\widehat{BC} = 42°24'$	Sinus de l'angle droit 10000. Donne le ſinus de l'arc de complement du coſté de l'angle droit A B 8704. Combien la ſecante de A C 15557? Vient la ſecante 13541. Dont l'arc pour la requiſe B C 42 deg. 24.

Stevin fait remarquer en note que l'on aurait pu trouver $\widehat{BC}$ en utilisant seulement le théorème XXV ; on aurait trouvé le sinus de son complément ; mais cela aurait nécessité de faire une division, opération plus délicate que la multiplication mentionnée ci-dessus.

Deuxième étape : calcul de l'angle $\widehat{A}$

Le théorème XXVIII donne $\dfrac{\sin(90°)}{\tan\left(\widehat{AC}\right)} = \dfrac{\sin\left(90° - \widehat{A}\right)}{\tan\left(\widehat{AB}\right)}$; les théorèmes 19 et 21 permettent d'améliorer ceci et d'obtenir $\dfrac{\sin(90°)}{\tan\left(\widehat{AC}\right)} = \dfrac{\tan\left(90° - \widehat{AB}\right)}{\sec\left(\widehat{A}\right)}$ et d'en déduire $\sec\left(\widehat{A}\right)$ à l'aide d'une multiplication simple. Voici les résultats :

$\sin(90°) = 10000$ $\tan\left(\widehat{AC}\right) = \tan(50°) = 11918$ $\tan\left(90° - \widehat{AB}\right) = \tan(60°30') = 17675$ $\sec\left(\widehat{A}\right) = 21065$ $\widehat{A} = 61°39'$	Le ſinus de l'angle droit 10000. Donne la tangente de l'hypothenuſe A C 11918. Combien la tangente de l'arc de complement de A B 17675 Vient la ſecante 21065. L'arc d'icelui pour l'angle requis A 61 deg. 39.

Troisième étape : calcul de l'angle $\widehat{C}$

La formule des sinus permet de conclure, et le théorème XXI permet de simplifier le calcul de $\sin\left(\widehat{C}\right)$. On a $\dfrac{\sin\left(\widehat{AB}\right)}{\sin\left(\widehat{C}\right)} = \dfrac{\sin\left(\widehat{AC}\right)}{\sin(90°)} = \dfrac{\sin(90°)}{\sec\left(90° - \widehat{AC}\right)}$, d'où le résultat à l'aide d'une multiplication. On connaît $\sin\left(\widehat{C}\right)$ et comme $\widehat{AB}$ est inférieur à un quart de grand cercle, on sait par le théorème II que $\widehat{C}$ est aigu, d'où la valeur de $\widehat{C}$.

Voici les résultats :

$\sin(90°) = 10000$ $\sec\left(90° - \widehat{AC}\right) = \sec(40°) = 13054$ $\sin\left(\widehat{AB}\right) = \sin(29°30') = 49242$ $\sin \widehat{C} = 6428$ $\widehat{C} = 40°$	Le ſinus de l'angle droit 10000. Donne la ſecante de l'arc de complement de l'hypothenuſe A C 13054. Combien le ſinus de A B 49242 Vient le ſinus 6428. L'arc d'icelui pour l'angle requis C 40 deg.

Le cas des triangles sphériques avec un côté droit

Une seule proposition dans ce chapitre : la proposition 38 qui suppose connus en plus du côté droit (c'est à dire égal à un quart de grand cercle) deux autres termes. Stevin considère alors 17 types de triangles.

Dans les exemples 1 à 4 sont supposés connus l'angle opposé au côté droit et un côté.

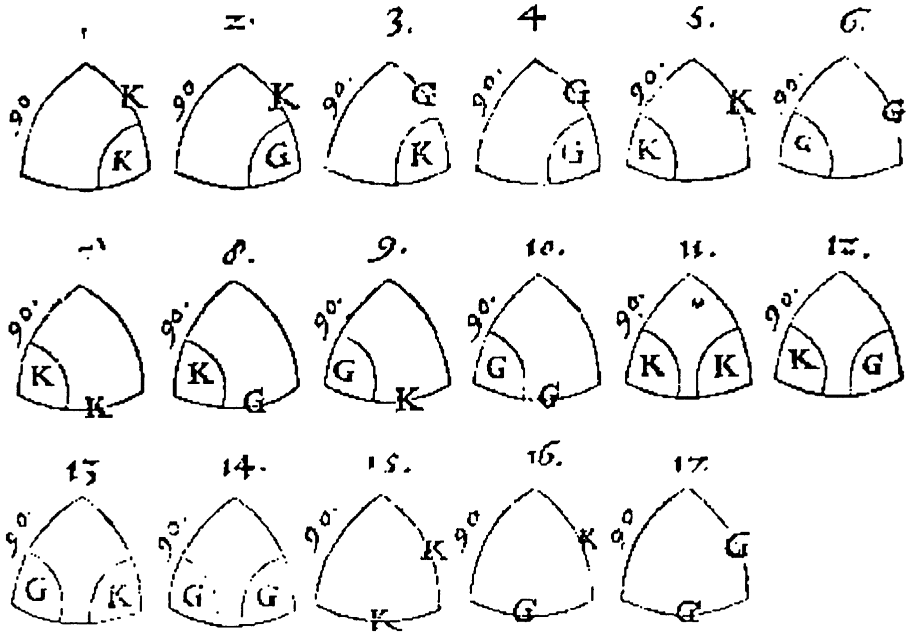
Dans les exemples 5 à 6 sont supposés connus un angle adjacent au côté droit et son côté opposé.

Dans les exemples 7 à 10 sont supposés connus un angle adjacent au côté droit et son côté adjacent.

Dans les exemples 11 à 14 sont supposés connus un angle adjacent et l'angle opposé au côté droit.

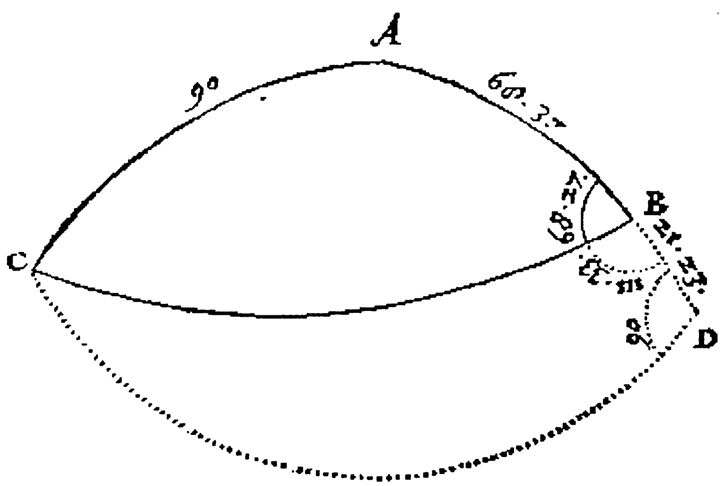
Dans les exemples 15 à 17 sont supposés connus les trois côtés.

Le cas où seraient connus les deux angles adjacents au côté droit n'est pas étudié ici.



L'exemple 1 présenté par Stevin est le suivant : $\widehat{AB}$ = 90° ; $\widehat{AB}$ = 68°37' et $\widehat{ABC}$ 68°17'.
Stevin construit le grand cercle CD de pôle A. Le triangle sphérique rectangle BCD possède trois termes connus (l'angle $\widehat{D}$ droit, l'angle $\widehat{DBC}$ complémentaire de $\widehat{ABC}$ et le côté $\widehat{BD}$ complémentaire de $\widehat{AB}$). Ce type de triangle a été étudié dans la proposition 36 de la partie précédente.

Le donné. Soit ABC un triangle ſpherique, dont le coſté AC fait 90 deg. AB 68 deg. 37 ①, & l'angle ABC 68 deg. 27 ①.



Le requis. Il faut trouver le troiſieſme coſté BC, avec les autres deux angles A, ACB.

Détaillons la démarche de Stevin.

Tout d'abord le triangle rectangle *BCD* a un angle obtus et un côté aigu ; alors l'angle $\widehat{C}$ est nécessairement aigu (théorème II) et l'hypothénuse et le troisième côté sont nécessairement obtus.

Dans *BCD*, par le théorème XXVI (c'est-à-dire notre formule (5')) on a : $\dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{\sin(90°)} = \dfrac{\sin\left(90° - \widehat{C}\right)}{\sin\left(90° - \widehat{BD}\right)}$, ce qui peut s'écrire aussi $\dfrac{\sin(90°)}{\sec\left(90° - \widehat{B}\right)} = \dfrac{\sec\left(\widehat{BD}\right)}{\sec\widehat{C}}$, ce qui permet d'obtenir $\sec\widehat{C}$ par une multiplication simple, puis $\widehat{C}$ par les tables. On en déduit l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle *ABC*. Voici les résultats obtenus :

Invention de l'angle **A C B.**

Sinus de l'angle droit	10000,
Donne ſecante de l'arc de complement de A B C	10751.
Combien la ſecante de l'arc de complement de A B	107393
Vient ſecante	11546.
L'arc d'icelle	30 deg.
Souſtrait de	90 deg.
Reſte pour l'angle requis A C B	60 deg.

Dans *BCD*, par le théorème XXVII (c'est-à-dire notre formule (2'')) on a $\dfrac{\sin(90°)}{\sin\left(\widehat{BD}\right)} = \dfrac{\tan\widehat{B}}{\tan\left(\widehat{CD}\right)}$ d'où on déduit $\tan\left(\widehat{CD}\right)$ puis $\widehat{CD}$, c'est-à-dire $\widehat{A}$ nécessairement obtus. Voici les résultats obtenus :

Invention de l'angle **A.**

Sinus de l'angle droit	10000.
Donne ſinus de l'arc de complement de A B	3646.
Combien tangente de l'angle A B C	25322
Vient tangente	9231.
L'arc d'icelle	42 deg. 43.
Souſtrait de	180 deg.
Reſte pour l'angle requis A	137 deg. 17.

Dans *BCD*, le théorème XXVIII (c'est-à-dire notre formule (2')) on a $\dfrac{\sin(90°)}{\sin\left(90° - \widehat{B}\right)} = \dfrac{\tan\left(\widehat{BC}\right)}{\tan\left(\widehat{BD}\right)}$, ce qui peut s'écrire $\dfrac{\sec\widehat{B}}{\sin(90°)} = \dfrac{\tan\left(\widehat{BC}\right)}{\tan\left(\widehat{BD}\right)}$, d'où on déduit $\widehat{BC}$ nécessairement obtus. Voici les résultats obtenus :

Invention du costé B C.

Sinus de l'angle droit	10000.
Donne la secante de l'angle A B C	27225.
Combien tangente de l'angle de complement de A B	39162
Vient tangente	10661.
L'arc d'icelle	46 deg. 50.
Soustrait de	180 deg.
Reste pour le requis B C	133 deg. 10.

Le cas des triangles quelconques

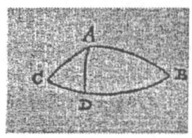
La partie concernant les triangles quelconques se décompose en six propositions :

Proposition 39 : Sont supposés connus deux côtés et un angle non compris entre ces deux côtés.

Ce cas relève de la formule des sinus. Stevin donne et démontre 12 règles permettant de donner, selon la nature des termes connus du triangle, le nombre de solutions au problème (une ou deux).

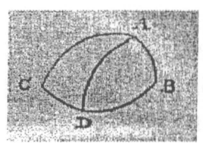
Stevin suppose connus l'angle $\widehat{C}$ et les côtés $b = \overset{\frown}{AC}$ et $c = \overset{\frown}{AB}$.

Règle I *: Si l'angle C était aigu et AC plus petit que AB, l'angle B sera seulement aigu.*



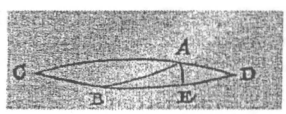
AD est perpendiculaire à *BC* en *D.* L'arc $\overset{\frown}{AD}$ est inférieur à 90° et l'angle $\widehat{B}$ aussi.

Règle II *: Si l'angle C était obtus et AC plus grand que AB, l'angle B sera seulement obtus.*



AD est perpendiculaire à *BC* en *D.* L'arc $\overset{\frown}{AD}$ est supérieur à 90° et l'angle $\widehat{B}$ aussi.

Règle III *: Si l'angle C était aigu et AC plus grand que le quart d'un cercle et AB pas plus petit que la différence entre AC et le demi-cercle, l'angle B sera seulement obtus.*

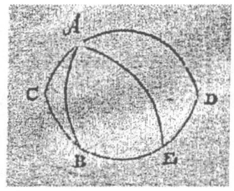


C et *D* sont diamétralement opposés.

L'arc $\overset{\frown}{AE}$ est perpendiculaire à *CD* en *E.*

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est plus grand que $\overset{\frown}{AD}$. Les angles $\widehat{D}$ et $\widehat{B}$ des triangles rectangles *ADE* et *AEB* sont aigus. Donc $\overset{\frown}{ABC}$ est obtus.

***Règle IV** : Si l'angle C était obtus et AC plus petit que le quart d'un cercle et AB plus petit que la différence entre AC et le demi-cercle, l'angle B sera seulement aigu.*



Même type de raisonnement que ci-dessus.

***Règle V** : Si AC était égal à AB, l'angle B sera seulement égal à C.*

Le triangle sphérique *ABC* est « isocèle » et a dons deux angles égaux

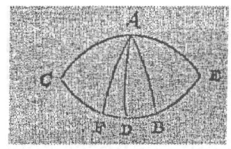
***Règle VI** : Si le triangle n'est pas l'un des cinq susdits, et que l'angle B par la construction fut trouvé droit, il y a seulement cette solution.*

Le triangle sphérique *ABC* est alors rectangle en *B*

***Règle VII** : Si le triangle n'est pas un des six susdits, il y aura deux solutions.*

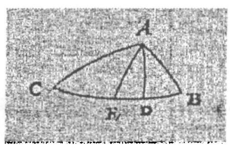
Cette règle se démontre en considérant les cas de triangles ne relevant pas des règles I à VI ; c'est ce qui constitue les règles VIII à XII.

***Règle VIII** : Si AC faisait le quart d'un cercle, et que l'angle B par la construction fut trouvé oblique[6], il aura deux solutions.*



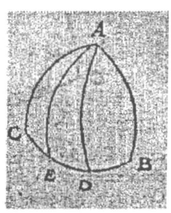
L'arc $\overset{\frown}{AD}$ est perpendiculaire au demi-cercle *CE*. Les arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{AE}$ valent 90°. Les angles de sommets *C* et *E* sont égaux. Les deux triangles *ABC* et *AFC* ont en commun l'angle $\widehat{C}$ et les côtés $b = \overset{\frown}{AC}$ et $c = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF}$.

***Règle IX** : Si l'angle C était aigu, et AC plus petit que le quart d'un cercle, et AB plus petit que AC, et que l'angle B par la construction fut trouvé oblique, il aura deux solutions.*



Les deux triangles *ABC* et *AEC* ont en commun l'angle $\widehat{C}$ et les côtés $b = \overset{\frown}{AC}$ et $c = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$.

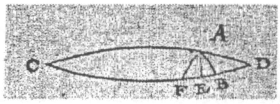
***Règle X** : Si l'angle C était aigu, et AC plus grand que le quart d'un cercle, et AB plus grand que AC, et que l'angle B par la construction fut trouvé oblique, il aura deux solutions.*



Même démarche et même conclusion que ci-dessus.

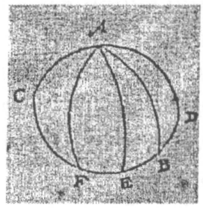
[6] non droit

Règle XI *: Si l'angle C était aigu, et AC plus grand que le quart d'un cercle, et AB plus petit que la différence entre AC et le demi-cercle, et que l'angle B par la construction fut trouvé oblique, il aura deux solutions.*



L'arc $\overset{\frown}{AE}$ est perpendiculaire au demi-cercle *CD*. Les deux triangles *ABC* et *AFC* ont en commun l'angle $\widehat{C}$ et les côtés $b = \overset{\frown}{AC}$ et $c = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF}$.

Règle XII *: Si l'angle C était obtus, et AC plus petit que le quart d'un cercle, et AB plus grand que la différence entre AC et le demi-cercle, et que l'angle B par la construction fut trouvé oblique, il aura deux solutions.*



Même conclusion que ci-dessus.

Il présente ces douze règles sous forme d'un algorithme très parlant. Le schéma en est donné en annexe en format paysage pour gagner en lisibilité.
Proposition 40 : Sont supposés connus deux côtés et l'angle qu'ils contiennent.
Là encore Stevin utilise la hauteur issue d'un des angles inconnues pour résoudre le triangle.
Proposition 41 : Sont supposés connus deux angles et un côté non compris entre ces deux angles.
Proposition 42 : Sont supposés connus deux angles et le côté compris entre ces deux angles.
Proposition 43 : Sont supposés connus les trois côtés.
Stevin utilise le théorème XXX pour trouver un angle.
Proposition 44 : Sont supposés connus les trois angles.
Stévin utilise le théorème XXXI pour trouver un côté.

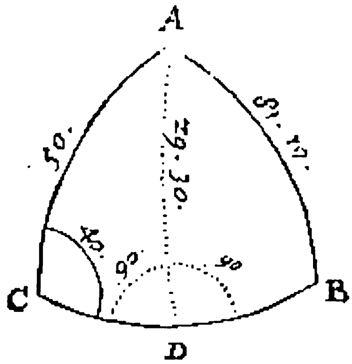
Examinons l'exemple 1 proposé par Stevin pour illustrer la proposition 39.
Le triangle sphérique *ABC* est tel que : $\overset{\frown}{AC} = 50°$; $\overset{\frown}{AB} = 81°19'$; $\widehat{C} = 40°$.
Ce triangle relève de la règle 1 car $\widehat{C}$ est aigu ; $\overset{\frown}{AC}$ est plus petit que $\overset{\frown}{AB}$; Stevin en déduit qu'alors $\widehat{B}$ est nécessairement aigu et dans ce cas, un seul triangle répond aux contraintes.

1. *Exemple du triangle de la 1 & 2 reigle.*

Le donné. Soit ABC un triangle spherique, dont l'angle C fait 40 deg. le costé AC 50 deg. & AB 81 deg. 19 (1).

Le requis. Il faut trouver le troisiesme costé BC, avec les autres deux angles CAB, B.

Preparation. Je voy premierement sous quelle reigle appartient ce triangle, & le trouvant de la 1 reigle, je tire l'arc AD dedans le triangle, à angle droit sur CB, & ainsi j'ay un triangle rectangle ADC avec trois termes cognus, par iceux cerchés le costé de son angle droit AD par la 34 proposition, il se trouve de 29 deg. 30 (1). Tellement que ADB est maintenant aussi un triangle rectangle avec trois termes cognus.



Détaillons la démarche de Stevin pour résoudre le triangle de l'exemple 1.
Il trace la hauteur *AD* du triangle, située nécessairement à l'intérieur.

Dans le triangle rectangle *ACD*, grâce au théorème XXIII, il calcule $\overset{\frown}{AD}$, nécessairement aigu.
Puis dans le triangle rectangle *ACD*, dont on connaît deux côtés et deux angles, il calcule grâce au théorème XXV le côté $\overset{\frown}{CD}$.

$$\frac{\sin(90°)}{\sin\left(90° - \overset{\frown}{AD}\right)} = \frac{\sin\left(90° - \overset{\frown}{CD}\right)}{\sin\left(90° - \overset{\frown}{AC}\right)} = \frac{\sec \overset{\frown}{AC}}{\sec \overset{\frown}{CD}}, \text{ d'où } \overset{\frown}{CD}.$$

Il calcule de même le côté $\overset{\frown}{BD}$ dans le triangle rectangle *ABD* et en déduit $\overset{\frown}{BC}$ par une addition.

Il calcule les angles $\overset{\frown}{CAD}$ et $\overset{\frown}{BAD}$ grâce au théorème XXVIII et obtient $\overset{\frown}{BAC}$ par une addition.

Enfin il calcule l'angle $\hat{B}$ dans le triangle rectangle *ABD*. La formule des sinus est plus agréable dans le triangle rectangle que dans le triangle *ABC*.
Voici ses réponses.

Invention du costé B C.

Premierement ayant fait la preparation comme dessus, je trouve le costé D C du triangle rectangle A D C, par la 32 proposition, de 42 deg. 24.

A iceux adjousté le costé DB du triangle rectangle A D B, qui se trouve, par la 32 proposition, de 80 deg. 1.

Font ensemble pour le costé requis B C 122 deg. 25.

Invention de l'angle C A B.

Premierement ayant fait la preparation comme dessus, je trouve l'angle CAD du triangle rectangle A D C, par la 32 proposition, de 61 deg. 39.

A iceux adjousté l'angle D A B du triangle rectangle ADB, qui se trouve, par la 32 proposition, de 85 deg. 3.

Font ensemble pour l'angle requis ADC 146 deg. 42.

Invention de l'angle B.

Premierement ayant fait la preparation comme dessus, je trouve l'angle B du triangle rectangle ADB, par la 32 proposition, qui est aussi l'angle requis, de 29 deg. 53.

Utilisation de la trigonométrie sphérique en navigation

Des exemples de Stevin (1548-1620)

Les exemples suivants sont extraits d'un traité de navigation publié en 1605 pour le Prince Maurice de Nassau et l'école du génie de Leyde crée par le Prince. On les trouve précisément dans le livre IV *De l'histiodromie ou cours des navires* pages 144-147 (traduction de Girard, édition 1584). Stevin utilise le vocabulaire suivant : un grand cercle, ou cercle majeur sur une sphère (la Terre en l'occurrence) est un *cours droit* ; un rumb, ou loxodromie est un *cours oblique*.

Naviguer à cours droit consiste à suivre une route maritime équivalente à un grand cercle : la distance parcourue est alors minimale. Naviguer à cours oblique, c'est naviguer en conservant un cap constant : l'angle que fait la route maritime avec le méridien du lieu reste fixe. Les loxodromies ne sont pas des cercles.

Toutes les mesures sont exprimées en degrés, minutes, secondes.

Premier exemple : le triangle de navigation

Stevin énonce dans son livre IV une ***proposition I*** en ces termes :
Étant donnés trois termes de deux lieux, c'est à dire trois termes parmi les six suivants :

I Angle de position direct du premier lieu au second
II Angle de position directe du second lieu au premier
III Différence des longitudes
IV Latitude du premier lieu
V Latitude du second lieu
VI Distance des deux lieux

trouver les trois autres termes.

Stevin résout un exemple, accompagné d'une figure.

PROPOSITION I.

Estans donnez trois termes de deux lieux, assavoir trois termes des 6 suivans : comme,

I. *Angle de position direct du premier lieu, au second.*

II. *Angle de position direct du second lieu, au premier.*

III. *Difference des longitudes.*

IV. *Latitude du premier lieu.*

V. *Latitude du second lieu.*

VI. *Distance des deux lieux.*

Trouver les trois autres termes.

Le donné. Soit A B C D le globe terrestre, & B D l'equateur, & D commencement des longitudes, A pole, E premier lieu, F second, E F arc de cercle majeur, comme distance : E G 10 degrez, & F H 30 degrez, les latitudes des deux lieux, dont les complemens seront A E 80, & A F 60 degrez, & G H la difference

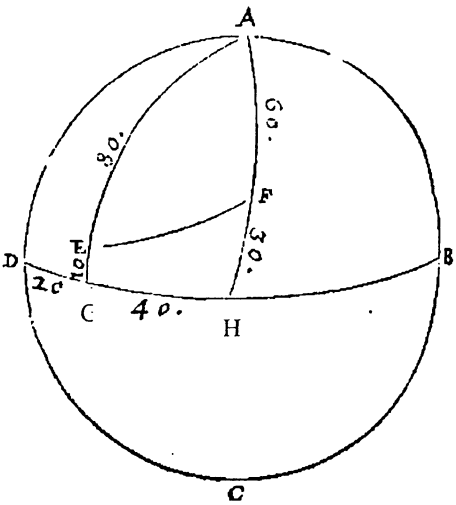


FIG 1 : La figure de Stevin

Les deux lieux sont les points E et F

Les six données sont ici

I : $\widehat{AEF}$ inconnu

II : $\widehat{AFE}$ inconnu

III : $\widehat{GOH} = \widehat{GH} = 40°$ connu

IV : $\widehat{GOE} = \widehat{GE} = 10°$ connu

V : $\widehat{HOF} = \widehat{HF} = 30°$ connu

VI : $\widehat{EOF} = \widehat{EF}$ inconnu

L'arc $\widehat{EF}$ est un arc de grand cercle, les arcs $\widehat{AE}$ et $\widehat{AF}$ aussi, si bien que AEF est un triangle sphérique dont on connaît deux côtés et un angle ; il est résoluble.

On a pour le triangle sphérique AEF :

côtés	$a = \widehat{EF} = ?$	$e = \widehat{AF} = 90° - 30° = 60°$	$f = \widehat{AE} = 90° - 10° = 80°$
angles	$\widehat{A} = 40°$	$\widehat{E} = ?$	$\widehat{F} = ?$

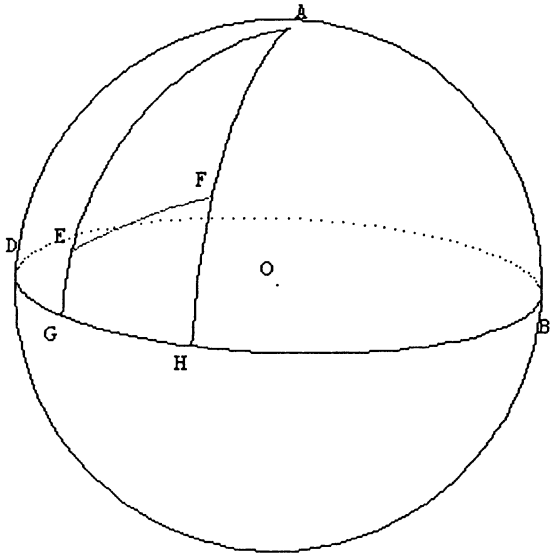


FIG 2 : Le triangle sphérique *AEF*

On peut calculer a grâce à la formule des cosinus. Ce n'est évidemment pas ainsi que Stevin procède.

$\cos a = \cos 80°\cos 60° + \sin 80°\sin 60°\cos 40° \approx 0{,}74016$
d'où $a \approx 42{,}255° \approx 42°15'$
Une fois connu a, on peut appliquer la formule des sinus ; ici $\widehat{E} < 90°$ et $\widehat{F} > 90°$
On obtient :

$\sin(\widehat{E}) = \dfrac{\sin e}{\sin a} \times \sin(\widehat{A}) \approx 0{,}82785$; d'où $\widehat{E} \approx 55{,}878° \approx 55°53'$

$\sin(\widehat{F}) = \dfrac{\sin f}{\sin a} \times \sin(\widehat{A}) \approx 0{,}94139$; d'où $\widehat{F} = 109{,}713° \approx 109°43'$.

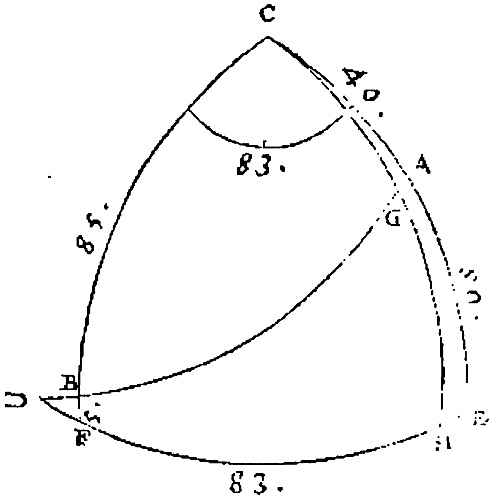
> Stevin donne les réponses suivantes en évoquant la proposition 40 (voir chapitre précédent) de la trigonométrie sphérique :
> $AEF = 55°51'$; $AFE = 109°44'$; $EF = 42°15'$

Deuxième exemple : la navigation à cours droit

Voici ce qu'écrit Stevin : *Après que SON EXCELLENCE eut entendu la navigation par rumbs, comme on les verra ci après, et comparant les cours droits à iceux, comme plus courts, il lui a semblé bon que j'en écrive quelque chose, puisque l'ordre même le requerrait, si on s'en voulait servir, et ainsi j'en ai fait ces deux descriptions suivantes, l'une Mécanique, l'autre Mathématique.*
Stevin traite alors l'exemple suivant :

2 Exemple, Mathematiquement.

Le donné. Soyent A & B deux lieux sur la terre, C pole, FE l'equateur, BF latitude de B, 5 degrez, A E 50 deg. latitude de A, & iceux produits se rencontreront



au pole C, ainsi que B C, C A seront les complemens des latitudes, & F E 83 deg. difference des longitudes, pour l'angle B C A.

Le requis. On veut faire un cours droit de A jusques en B, par voye Mathematique, assavoir par le moyen des triangles spheriques.

1 *Preparation.*

Je tire A B arc de cercle majeur, le produisant jusques à l'equateur en D.

1 *Partie de l'operation.*

Au triangle B C A, lequel a trois termes cognus, BC, CA, & l'angle BC A 83 deg. par lesquels on trouvera les 3 termes incognus, selon la 42 prop. des triangles spheriques, comme C A B 92 deg. 8 ① angle de position directe, & d'autant faut-il s'essoigner du Nort par l'Occident vers le Zud, c'est à dire 87 deg. 52 ① de Zud vers VVest, ce qu'on fera aussi environ 4 degrez de long, comme de A en G; & touchant les autres deux termes, l'angle C B A 39 deg. 45 ①, & A B la distance requise 81 deg. 41 ①.

A et *B* sont deux lieux sur la Terre ; *C* désigne le pôle, le grand cercle *FE* est l'équateur ; on connaît les latitudes des deux lieux, ainsi que la différence de leurs longitudes et il s'agit de faire un « cours droit de *A* à *B* par voie mathématique », c'est à dire déterminer l'arc de grand cercle qui passe par *A* et *B* en utilisant les triangles sphériques.

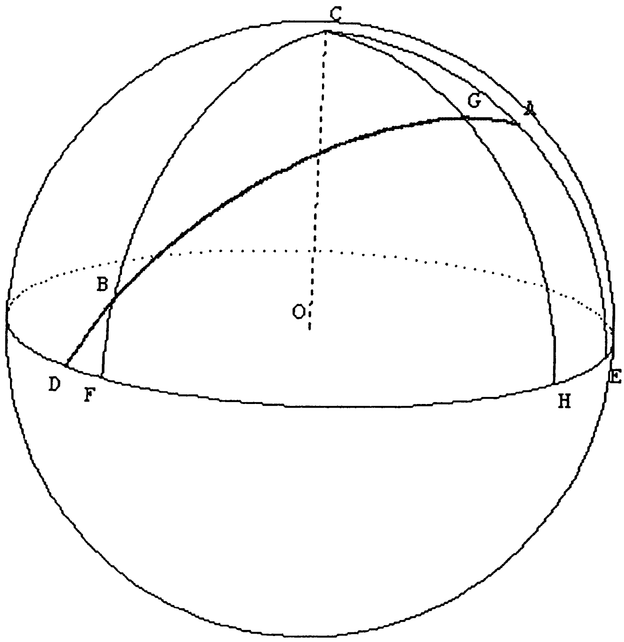


FIG 3 : Le cours droit de A vers B

A a pour latitude 50°Nord donc $\overset{\frown}{AE} = 50°$ et $\overset{\frown}{CA} = 40°$.
B a pour latitude 5° Nord donc $\overset{\frown}{BF} = 5°$ et $\overset{\frown}{CB} = 85°$.
L'angle de sommet C du triangle sphérique ABC vaut 83°.
Pour naviguer de A vers B comment être sûr que l'on reste bien sur le grand cercle ?

Il faut évaluer le cap à suivre au départ c'est à dire l'angle $\widehat{CAB}$ (c'est l'objet de la première étape), puis s'assurer que l'on ne s'écarte pas du grand cercle AB (c'est l'objet des étapes suivantes). Il s'agit de « réajuster », tous les 4°, le trajet pour se maintenir à peu près sur le grand cercle AB. Cette valeur de 4° semble élevée : un arc de 4° a une longueur de l'ordre de 450 km...

Nous allons détailler la méthode exposée par Stevin, étape par étape, en donnant d'abord notre solution du problème qui utilise les formules modernes de trigonométrie sphérique, et nous les comparerons avec les réponses données par Stevin.

1) Première étape : résolution de ABC pour connaître le cap à suivre au départ

Le grand cercle AB coupe l'équateur EF en D ; ABC est un triangle sphérique et on a

côtés	$a = 85°$	$b = 40°$	$c = ?$
angles	$\widehat{A} = ?$	$\widehat{B} = ?$	$\widehat{C} = 83°$

Il est résoluble. La formule des cosinus donne :
$\cos c = \cos(85°)\cos(40°) + \sin(85°)\sin(40°)\cos(83°)$.

On en déduit $c = \overset{\frown}{AB} \approx 81{,}674° \approx 81°40'$.

On peut utiliser encore la formule des cosinus pour trouver $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.
$\cos(85°) = \cos(40°)\cos(c) + \sin(40°)\sin(c)\cos(\widehat{A})$.
D'ou $\cos(\widehat{A}) \approx -0{,}0374$ et $\widehat{A} \approx 92{,}142° \approx 92°8'$
$\cos(40°) = \cos(85°)\cos(c) + \sin(85°)\sin(c)\cos(\widehat{B})$.
D'où $\cos(\widehat{B}) \approx 0{,}7644$ et $\widehat{B} \approx 40{,}15° \approx 40°9'$.
La formule des sinus permet aussi de trouver $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$; encore faut-il savoir si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont aigus ou obtus...

> Stevin donne les réponses suivantes :
> $CAB = 92°8'$; dont il déduit $BAE = 87°52'$ (le supplémentaire)
> $CBA = 39°45'$
> $AB = 81°41'$

On observe une légère distorsion des résultats pour l'angle $\widehat{B}$ de ABC.

Le cap à suivre au départ est donc 92°8'.

2) Deuxième étape : obtenir $\overset{\frown}{DG}$

On a pour ce triangle sphérique rectangle DBF les données suivantes :

côtés	$d = \overset{\frown}{BF} = 5°$	$b = \overset{\frown}{DF} = ?$	$f = \overset{\frown}{DB} = ?$
angles	$\widehat{D}$	$\widehat{B} = 40°9'$	$\widehat{F} = 90°$

$\widehat{D}$, b, et f sont nécessairement aigus.

La formule duale des cosinus permet d'obtenir l'angle $\widehat{D}$ (formule (5') des triangles sphériques rectangles).
$\cos(\widehat{D}) = \sin(\widehat{B})\cos d = \sin(40°9')\cos(5°) \approx 0{,}6423$.
D'où $\widehat{D} \approx 50{,}034° \approx 50°2'$.
La formule des sinus donne $\sin f = \dfrac{\sin(5°)}{\sin(50°2')} \approx 0{,}1137$ et $f = \overset{\frown}{DB} \approx 6{,}530° \approx 6°32'$.

> Stevin obtient (avec $\widehat{B} = 39°45'$)
> $\widehat{D} = 50°26'$
> $\overset{\frown}{DB} = 6°27'$

$\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BA}$; on obtient $81{,}674 + 6{,}530 = 88{,}204° \approx 88°12'$; puis $\overset{\frown}{DG} = \overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{AG}$ $= 88°12' - 4° = 84°12'$

> Stevin obtient $\overset{\frown}{DA} = 88°8'$ et $\overset{\frown}{DG} = 84°8'$

3) Troisième étape : premier réajustement

Stevin considère et résout le triangle sphérique rectangle DGH *pour connaître quel cours on prendra de G vers B.*

Pour le triangle sphérique rectangle DGH on a les données suivantes :

côtés	$d = \widehat{GH} = ?$	$g = \widehat{DH} = ?$	$h = \widehat{DG} = 84°12'$
angles	$\widehat{D} = 50°2'$	$\widehat{G} = ?$	$\widehat{H} = 90°$

Ici encore, d, g, $\widehat{G}$ sont nécessairement aigus.

La formule (4') des triangles sphériques rectangles permet d'écrire :

$\cos h = \cot(\widehat{D})\cot(\widehat{G})$ d'où $\tan(\widehat{G}) = \dfrac{1}{\tan(\hat{D})\cos(h)} \approx 8{,}2990$ et $\widehat{G} \approx 83{,}129° \approx$ 83°8' ; on en déduit que $\widehat{CGB}$ vaut $180° - 83°8' = 96°52'$.

On pourrait aussi calculer $d = \widehat{GH}$ qui donne la latitude de G.

> Stevin obtient en utilisant la proposition 34 des triangles sphériques rectangles l'angle *DGH* égal à 87°45', en prenant $\widehat{D} = 50°26'$ et $\widehat{DG} = 84°8'$; ce résultat est significativement différent de celui obtenu ci-dessus.
>
> Or la proposition 34 évoquée par Stevin est exactement celle utilisée ci-dessus. Avec les notions en vigueur à l'époque, elle s'écrit :
>
> $$\tan(\widehat{G}) = \sec(h) \times \tan(90° - \widehat{D})$$
>
> $\sec(h)$ désigne la sécante de h c'est à dire $\sqrt{1+\tan^2(h)} = \dfrac{1}{\cos(h)}$ en langage moderne.
>
> Stevin calcule donc $\sec(84°8') \times \tan(39°34') \approx 8{,}084$ et cela devrait donner $\widehat{G} \approx 82°57'$; ce n'est pas ce que renvoie Stevin.
>
> S'agit-il d'une confusion sur la valeur de l'arc $\widehat{AG}$? Si l'on prend $\widehat{AG} = 4'$ (au lieu de 4°), $\widehat{D} = 50°26'$, $\widehat{DG} = 88°4'$ on obtient $\tan(\widehat{G}) \approx 24{,}4924$ et $\widehat{G} \approx 87°\,40'$ ce qui est cohérent avec la réponse donnée par Stevin.

Dans le triangle sphérique *ABC* on a obtenu $\widehat{A} \approx 92°8'$ qui donne le cap à suivre.
4° plus loin sur le cours droit, arrivé en *G* on obtient dans le triangle sphérique *DGH* l'angle $\widehat{G} \approx 83°4'$; il s'en suit que l'angle $\widehat{DGC}$, qui donne le nouveau cap, vaut $180° - 83°4' = 96°56'$.

On pourrait évaluer cet angle $\widehat{DGC}$ en résolvant le triangle non sphérique *CAG* dont on connaît deux côtés $\widehat{AC} = 40°$ et $\widehat{AG} = 4°$, et un angle $\widehat{CAG} = 92°8'$. La formule des cosinus permet de calculer d'abord le troisième côté $\widehat{CG}$, puis l'angle $\widehat{AGC}$.

On obtiendrait $\cos\widehat{CG} = \cos(40°)\cos(4°) + \sin(40°)\sin(4°)\cos(92°8') \approx 0{,}7625$ et $\widehat{CG} \approx 40°19'$.

Puis $\cos(40°) = \cos(4°)\cos\widehat{CG} + \sin(4°)\sin\widehat{CG}\cos\widehat{AGC}$, doù

$\cos\widehat{AGC} \approx 0{,}1195$ qui donne $\widehat{AGC} \approx 83°8'$.

Stevin travaille autant que faire ce peut dans les triangles sphériques rectangles, avec des formules simples. Voila pourquoi il introduit ce point *D*.

4) Dernière étape

Soit K le point du grand cercle $\overset{\frown}{AB}$ tel que $\overset{\frown}{BK} = 4°$et $\overset{\frown}{CL}$ le méridien qui passe par K on peut résoudre le triangle sphérique rectangle DKL .

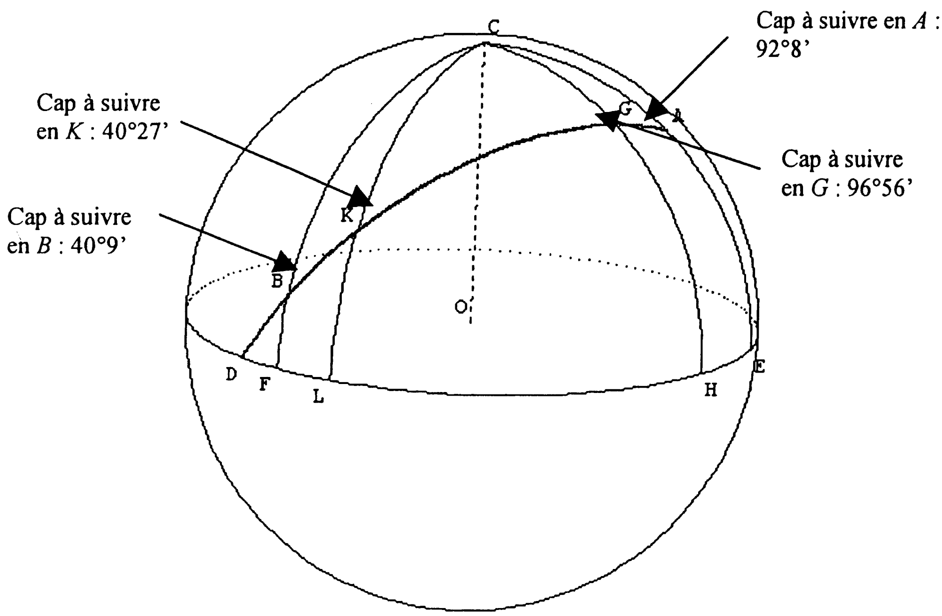


FIG 4 : Le triangle sphérique DKL

Dans le triangle sphérique rectangle DKL, on peut évaluer $\overset{\frown}{DK} = \overset{\frown}{DB} + 4° = 6°32' + 4° = 10°32'$; on a donc pour le triangle sphérique DKL :

côtés	$d = \overset{\frown}{KL} = ?$	$k = \overset{\frown}{DL} = ?$	$l = \overset{\frown}{DK} = 10°32'$
angles	$\widehat{D} = 50°2'$	$\widehat{K} = ?$	$\widehat{L} = 90°$

Ici encore d, k, $\widehat{K}$ sont aigus.

Grâce à la formule des sinus on trouve d : $\sin d = \sin(50°2') \times \sin(10°32') \approx 0\,;1401$ d'où $d \approx 8{,}052° \approx 8°3'$

Puis grâce à la formule (2') des triangles sphériques rectangles, on calcule $\widehat{K}$

$\cos(\widehat{K}) = \dfrac{\tan d}{\tan l} = \dfrac{\tan(8°3')}{\tan(10°32')} \approx 0{,}7611$; d'où $\widehat{K} \approx 40{,}442° \approx 40°27'$

L'angle sphérique $\widehat{CKA}$ vaut 40°27' tandis que l'angle $\widehat{CBA}$ vaut 40° 9'.

Les arcs de grand cercle $\overset{\frown}{AG}$ et $\overset{\frown}{BK}$ valent tous les deux 4° ; cependant du fait des différences de latitude des points A et B, les différences constatées entre les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CGB}$ d'une part (4°44') et $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CKA}$ d'autre part (18') ne sont en rien comparables. Au voisinage de l'équateur, ces différences sont moindres.

Naviguer sur un court droit, c'est à dire en suivant un grand cercle n'est pas chose aisé. Le cap, c'est à dire un des deux angles supplémentaires que fait ce grand cercle avec les méridiens qu'il traverse, autrement dit avec le Nord, change avec le méridien traversé, comme on le voit sur la figure ci-dessous.

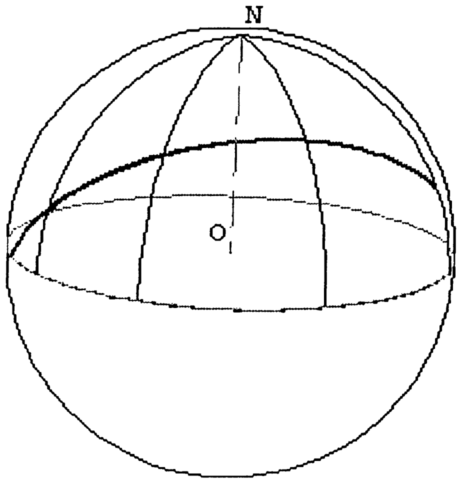


FIG 5 : Intersection du cours droit et des méridiens

Troisième exemple : comment faire une table de rumb

Naviguer à cap constant, c'est faire en sorte que la route suivie fasse toujours le même angle avec les méridiens traversés. Une telle route définit une courbe appelée loxodromie ou rumb. L'équateur terrestre, et chacun des méridiens sont les seuls grands cercles qui réalisent des loxodromies. Par un point de l'équateur, on peut imaginer tracer autant de rumbs que de caps possibles à suivre, de degré en degré par exemple. Mais une carte maritime contenant tous ces rumbs serait illisible. On se contente donc de faire figurer sur les cartes, d'une part certains points et d'autre part les rumbs correspondant aux caps donnés par la rose des vents, de 11°15' en 11°15'. Pour un point situé sur l'équateur, le rumb correspondant au cap 0° est le méridien passant par le lieu, le premier rumb correspond à un cap de 11°15'... L'équateur est le huitième rumb.

Stevin explique comment construire le quatrième rumb issu du point *R* de l'équateur.

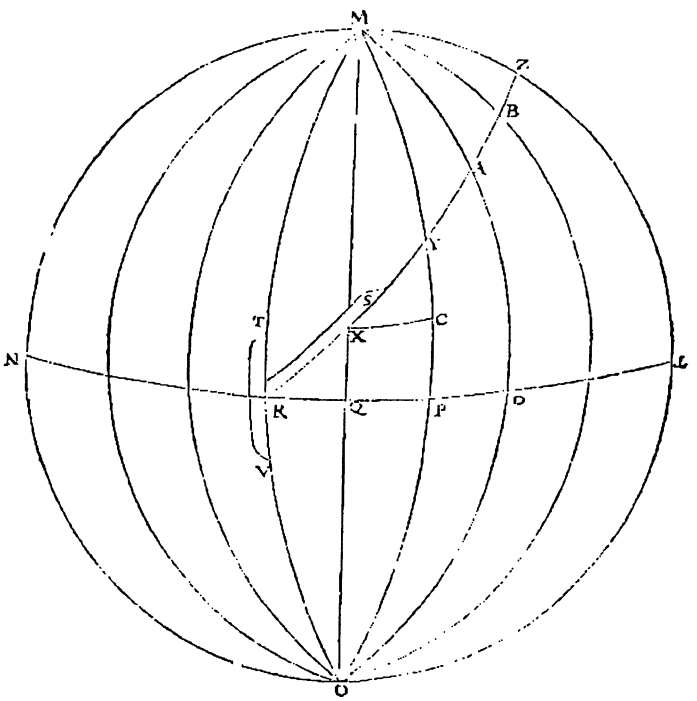


FIG 6 : La figure de Stevin

M désigne le pôle Nord ; *O* le pôle sud ; $\widehat{NL}$ l'équateur ; *R* un point de l'équateur, départ du rumb ; *RZ* le quatrième rumb, c'est à dire le rumb correspondant au cap $45° = \widehat{MRX} = \widehat{MXY}$ ... ; *MRO* le premier méridien ; *MQO* le deuxième méridien de sorte que $\widehat{RQ} = 1°$; et ainsi de suite jusqu'au méridien *MLO*, où $\widehat{RL} = 90°$. Le rumb coupe chacun de ces méridiens en *R* , *X* , *Y*, et ainsi de suite jusqu'à *Z* . Il s'agit de connaître la position précise de ces points d'intersection , autrement dit d'évaluer leur latitude, de façon à tracer le rumb.

Stevin propose deux méthodes : la première qu'on va détailler ici utilise la trigonométrie sphérique ; la seconde utilise la somme des sécantes.

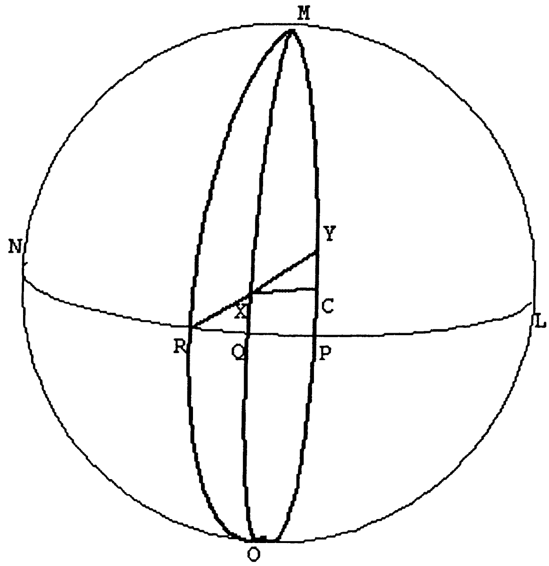


FIG 7 : Les triangles RXQ et XCY définis par le quatrième rumb RY (45°)

La figure ci-dessus reprend les données de Stevin ; RXY un morceau du rumb RZ ; ce n'est pas un arc de grand cercle puisque les angles que font cette courbe avec les méridiens traversés sont constamment égaux à 45°. Le point Z non noté sur la figure ci-dessus est le dernier point du rumb étudié, situé sur le dernier méridien ML. Comment évaluer la position de X ? Stevin assimile le petit morceau RX du rumb à un arc de grand cercle (c'est raisonnable car le morceau RX est effectivement relativement petit puisque $\overset{\frown}{RQ}$ mesure 1°). Si bien que RXQ est assimilé à un triangle sphérique rectangle résoluble pour lequel on a les données suivantes :

côtés	$r = \overset{\frown}{XQ} = ?$	$x = \overset{\frown}{RQ} = 1°$	$q = \overset{\frown}{RX} = ?$
angles	$\widehat{R} = 45°$	$\widehat{X} = ?$	$\widehat{Q} = 90°$

Grâce à la proposition (6') des triangles sphériques rectangles, on a :
$\cos(\widehat{X}) = \sin(\widehat{R})\cos x$ puis $\cos(\widehat{R}) = \sin(\widehat{X})\cos r$; d'où on obtient $\cos r \approx 0{,}99985$ et $r \approx 59'59''$.

Remarquons que si le triangle RQX était plan, rectangle avec un angle de 45°, il serait isocèle. Ici le triangle rectangle sphérique RQX n'est pas isocèle : les deux côtés de l'angle droit mesure l'un 1°, l'autre 59'59'' et diffèrent d'une seconde d'angle.

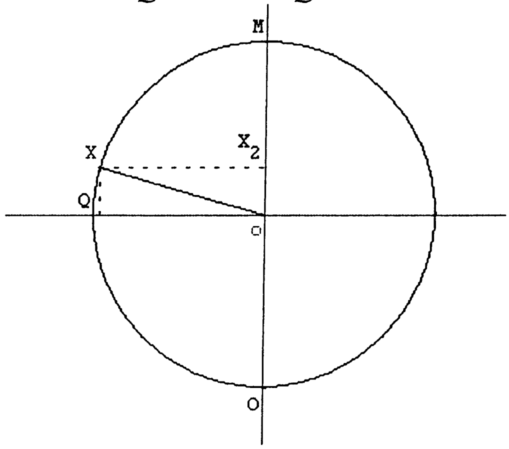
| Stevin trouve la même valeur pour $\overset{\frown}{XQ}$.

Comment calculer la position de Y ?
Stevin introduit le point C, intersection du troisième méridien et de l'arc de petit cercle parallèle à l'équateur qui passe par X (voir figure ci-dessus), si bien que $\overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{XQ} \approx 59'59''$.
Puis il considère le triangle YCX qu'il assimile à un triangle sphérique qu'il résout.

Cependant dans la réalité, *YCX* n'est pas un triangle sphérique : seul son côté *YC* est un arc de grand cercle ; le côte *XC* est un arc de petit cercle ; le côté *XY* est un morceau de rumb.

De ce triangle *YCX* on connaît l'angle droit $\widehat{C}$, l'angle $\widehat{X} = 45°$

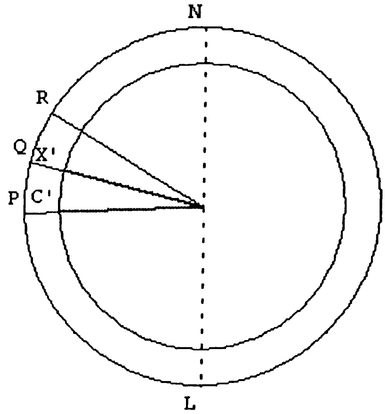
On doit évaluer $\widehat{XC}$, connaissant $\widehat{QP} = 1°$ et $\widehat{XQ} = 59'59'' = \widehat{CP}$



On visualise ci-dessus le grand cercle contenant le méridien *MQO* ; le petit cercle contenant *XC* a pour rayon $XX_2 = \cos(\widehat{XQ}) \times r$ (r étant le rayon de la sphère).

Ce résultat est un résultat classique en navigation, un petit cercle parallèle à l'équateur à une latitude φ a pour rayon $r\cos\varphi$.

On projette dans le plan de l'équateur le petit cercle contenant *X* et *C* ; on obtient la figure suivante :



L'arc $\widehat{PQ}$ a pour longueur $r\dfrac{\pi}{180}$, ce qui correspond à une mesure de 1°.

L'arc $\widehat{XC}$, morceau d'un petit cercle de rayon $\cos(59'59'') \times r$ qu'intercepte un angle au centre de 1° a pour longueur $\cos(59'59'') \times r \times \dfrac{\pi}{180}$; un arc ayant cette longueur sur la sphère est intercepté par un angle au centre de $(\cos(59'59''))\,° \approx 0{,}9998° \approx 59'59''$; ce qui donne $\widehat{XC} \approx 59'59''$

> Stevin donne $\widehat{XC}$ = 59'58'', en évoquant l'usage de *tables communes*. De quel type de tables s'agit-il ? Quelle est la technique utilisée pour les obtenir ?

Ceci étant fait, on revient au triangle sphérique rectangle *YCX* pour lequel on connaît trois éléments. On peut le résoudre et calculer $\widehat{CY}$, ce qui permettre par une simple addition d'en déduire $\widehat{PY}$, qui donne la position de *Y*... et ainsi de suite, jusqu'à épuisement des méridiens traversés par le rumb... et du calculateur.

Voila pourquoi Stevin propose une seconde méthode due à Edward Wright.
Il écrit : *Vue que la manière précédente* [celle des triangles sphériques] *serait plus longue que le loisir que je pourrais avoir, je me servirai à la place d'une autre dejà faite par Edward Wright ; et bien qu'elle ait quelques imperfections dont il sera parlé dans l'appendice, toutefois elle pourrait servir à la déclaration de notre dessein.*

Des exemples de Denoville (1760)

Ce navigateur normand a laissé un traité de navigation manuscrit dans lequel il résout des problèmes astronomiques, soit à l'aide d'instruments (quartier de réduction, quartier sphérique...), soit au moyen de la trigonométrie sphérique. Il utilise les logarithmes. Précisément ce que Denoville appelle sinus d'un angle *a* correspond en réalité à $10^5 \times \log\left(10^{10} \times \sin a\right)$ et pour Denoville le sinus de l'angle droit vaut 1000000 et correspond à la valeur du rayon utilisé pour les calculs des lignes trigonométriques.
Denoville n'emploie pas un langage algébrique, il utilise l'analogie c'est à dire la règle de trois et rédige en Français selon la formulation en vigueur : *telle quantité (1) est à telle quantité (2) comme telle quantité (3) est à la quantité (4).* Ce qui se traduit l'égalité algébrique $\frac{(1)}{(2)} = \frac{(3)}{(4)}$ où la quantité (4) est toujours l'inconnue.

De l'amplitude d'un astre

L'amplitude du soleil est la distance (exprimée en degré) qui sépare soit le lever du soleil du vrai Est, soit celle qui sépare le coucher du vrai Ouest. C'est un arc du grand cercle horizon.

Exemple I (page 195) : *Etant par la latitude de 50°00' Nord, le soleil ayant 12°00' de déclinaison aussi Nord, on demande quelle est l'amplitude du soleil et de quel côté, et le véritable air de vent où il doit se lever et coucher.*

On visualise la situation sur la figure ci-dessous. *HR* désigne le grand cercle horizon et *Z* est le zénith. L'axe *NS* du grand cercle équateur est l'axe du monde Nord-Sud qui fait avec l'horizon un angle de 50° (la latitude du lieu d'observation). Par une déclinaison de 12° N le trajet diurne du soleil est le petit cercle qui passe par *C* et est parallèle à l'équateur céleste. Ainsi l'observateur voit le soleil se lever vers le vrai Est (le point *E*) en *G* et se coucher vers le vrai ouest *O* en *G'*.On doit évaluer les arcs $\overset{\frown}{EG}$ et $\overset{\frown}{OG'}$. Ces arcs sont égaux. Pour ce faire on travaille dans le triangle sphérique rectangle *EGB* rectangle en *B*.

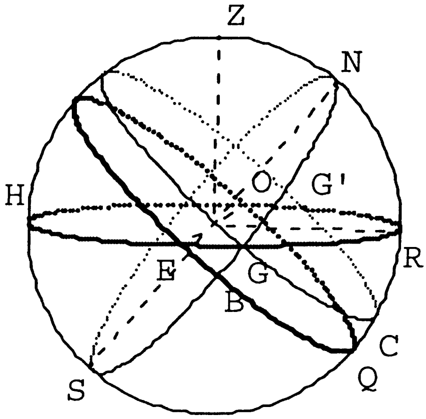
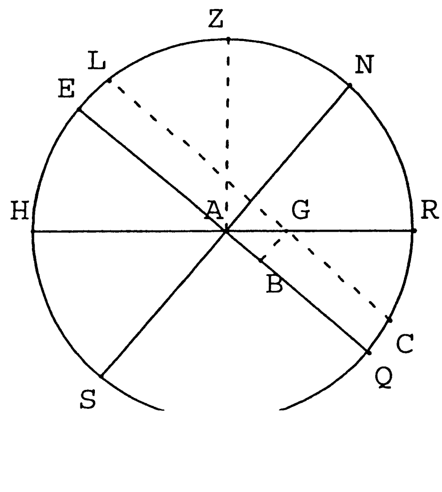


FIG 8 : Lever et coucher du soleil

Denoville donne la règle à utiliser.
Il faut faire cette règle de trois ; comme le sinus complément de la hauteur du pôle est au sinus total, ainsi le sinus de la déclinaison donnera le sinus de l'amplitude que l'on cherche.
Il présente ainsi la réponse :



Analogie pour trouver le sinus de l'amplitude côté AG
Comme sinus 40° 980807
Est au sinus total 90° 1000000
1931788
sinus de la décli 12° 931788

donne sinus amplitude
supputée Nord AG 18°52'.... 950981
ôté de ..... 22°30'
le soleil se lève à ENE prenant 3°38' plein E
le soleil se couche à ONO prenant 3°38' plein O

Sur la figure ci-dessus, projection orthographique de la sphère céleste, *LC* représente le trajet diurne du soleil par une déclinaison de 12° N (arc *QC*) ; *EQ* figure l'équateur céleste et *HR* l'horizon. L'arc *NR* mesure 50° c'est la latitude. La formule des sinus valable dans le triangle sphérique rectangle AGB donne $\frac{\sin\widehat{A}}{\sin\overset{\frown}{BG}} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\overset{\frown}{AG}}$. L'arc $\overset{\frown}{AG}$ est l'amplitude a cherchée. Avec les données la formule devient $\frac{\sin 40°}{\sin 12°} = \frac{\sin 90°}{\sin a}$

Denoville écrit $\frac{\sin 40°}{\sin 90°} = \frac{\sin 12°}{\sin a}$; formule qui se prête à l'usage des logarithmes. Si on note LDsin la fonction utilisée par Denoville et définie par LDdsin(x) = $10^5 \times \log\left(10^{10} \times \sin x\right)$, on a : LDsin(90°) + LDsin(12°) = LDsin(40°) + LDsin(a), qui donne à l'aide d'une addition et d'une soustraction la valeur de LDsin(a) puis de a à l'aide des tables.

Pour avoir la direction du lever et du coucher, c'est à dire la position des points G et G' sur le cercle horizon de l'observateur. Denoville compare l'amplitude obtenue avec 22°30', la moitié de 45°, qui correspond à la ligne ENE, ou ONO de la rose des vents.

Le point R de l'horizon est au nord N, le point H est au sud S, le point, le point G est à 3°38' de la direction ENE vers l'est E.

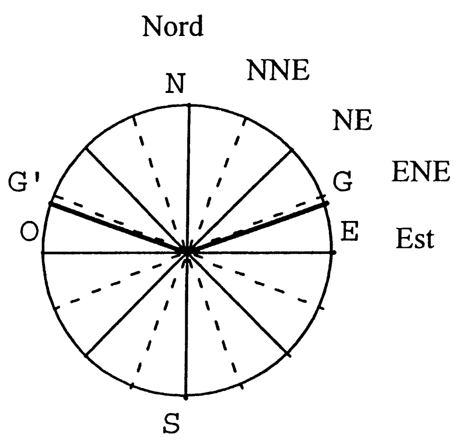
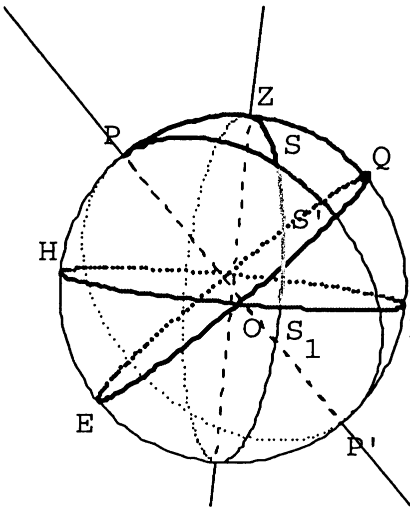


FIG 9 : Le cercle horizon de l'observateur

De l'azimut

L'azimut est l'arc de l'horizon compris entre le méridien du lieu et le cercle vertical qui passe par l'astre. Pour trouver l'azimut, il faut connaître trois choses : la latitude du lieu, la déclinaison et la hauteur du soleil sur l'horizon.

Exemple II page 199 : *La latitude d'un lieu étant de 47°48'du côté Nord, la déclinaison du soleil étant de 10°40' aussi Nord, et la hauteur horizontale de 38°52', on demande son azimut, supposant avoir fait l'opération après midi.*



Il s'agit de résoudre le triangle sphérique *PSZ*. Le point *P* désigne le pôle Nord. Le point *O* de l'horizon désigne le vrai Ouest. Le point *S* désigne la position du soleil au moment de l'observation (l'après-midi, dans l'hémisphère Nord)

On connaît la latitude (arc $\widehat{PH}$ ou $\widehat{ZQ}$), la déclinaison (arc $\widehat{SS'}$), et la hauteur du soleil (arc $\widehat{SS_1}$). On connaît donc les trois côtés de *PSZ*, qui sont les complémentaires des angles évoqués précédemment, et on cherche l'azimut c'est à dire l'arc $\widehat{RS_1}$ qui correspond à l'angle $\widehat{S_1ZR}$ ou encore le supplémentaire de l'angle $\hat{Z}$ du triangle *PSZ*. La formule des cosinus nous permettrait de conclure et le lecteur peut aisément faire les calculs...

Voyons comment procède Denoville. Les calculs sont accompagnés d'une figure qui représente la projection orthographique de la sphère céleste, que nous ne reproduisons pas ici. Denoville procède en trois temps.

Pratique	***Pratique***	***Pratique***
Latitude Nord........47°48'	*Hauteur soleil...... 38°58'*	*Déclinaison du soleil ..10°40'*
Ôté de ....90°	*Ôté de ....90°*	*Ôté de ....90°*
Compl^{nt} latitude.... 42°12'	*Distance soleil zénith ..51°8'*	*Dist du soleil au pôle...79°20'*

Pratique pour trouver le premier terme

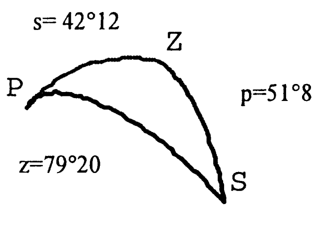
Complément de la latitude	*42°12'*	*Son sinus 982719*
Distance du soleil au zénith	*51°8'*	*Son sinus 989132*
Distance du soleil au pôle	*79°20'*	
Somme	*172°40'*	*1er terme 1971851*
Moitié de la somme des 3 nbres	*86°20'*	
Complément de la latitude	*42°12'*	
Premier excès	*44°8'*	*son sinus 984282*
....		
Moitié de la somme des 3 nbres	*86°20'*	
Distance du soleil au zénith	*51°8'*	
2ème excès	*35°12'*	*son sinus 976075*
....		
2ème terme Rayon double	*2000000*	*3ème terme 1960357*

Analogie pour trouver l'azimut

Comme le premier terme		*1971851*
Est au deuxième terme rayon doublé	*2000000*	
		3960357
Ainsi le troisième terme	*1960357*	
Reste		*1988506*
Sinus de l'azimut depuis minuit demi azimut	*61°10'............*	*994253*
Doubler le demi azimut	*61°10'*	
Somme	*122°20'*	
Oter de	*180°00'*	
Azimut du sud vers l'ouest puisque l'opération est faite après dîner	*57°40'*	

Encore une fois, Denoville utilise une analogie, c'est à dire une règle de trois. Il utilise en fait, par le biais des logarithmes, la formule multiplicative suivante $\sin^2 \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}$ où p désigne le demi-périmètre du triangle sphérique, b et c sont les deux côtés de l'angle de sommet A, c'est la formule (8) de notre formulaire.

Dans le triangle PSZ les trois côtés sont connus, et on cherche à évaluer l'angle de sommet Z qui représente le supplémentaire de l'azimut. On visualise les données sur la figure ci-dessous :



Le demi-périmètre $\frac{z+p+s}{2}$ vaut 86°20' ; Denoville appelle les deux excès les nombres $\frac{z+p+s}{2} - s$ = 44°8' et $\frac{z+p+s}{2} - p$ = 35°12' ; $\frac{\widehat{Z}}{2} = \frac{180° - a}{2}$ où a désigne l'azimut cherché.

Denoville considère la formule sous la forme équivalente suivante, et utilise les logarithmes :

$$\frac{\sin 42°12 \sin 51°8}{\sin^2 90°} = \frac{\sin 44°8 \sin 35°12}{\sin^2\left(\frac{180° - a}{2}\right)}$$

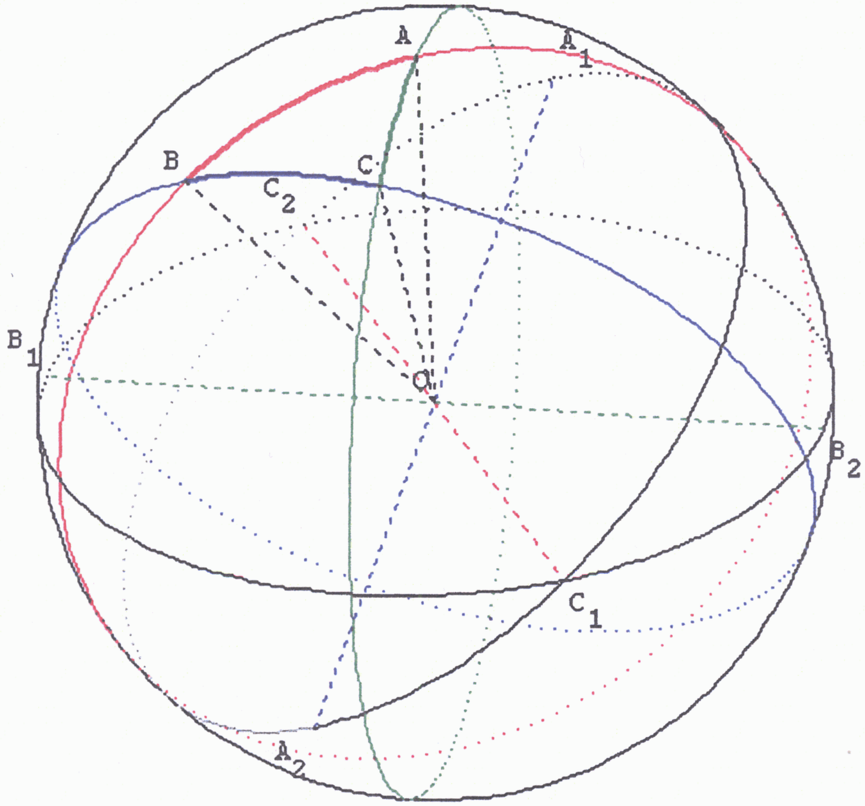
$$\text{LDsin}(42°12') + \text{LDsin}(51°8') + 2\ \text{LDsin}\frac{180 - a}{2}$$

$$= 2\ \text{LDsin}(90°).+ \text{LDsin}(44°8') + \text{LDsin}(35°12').$$

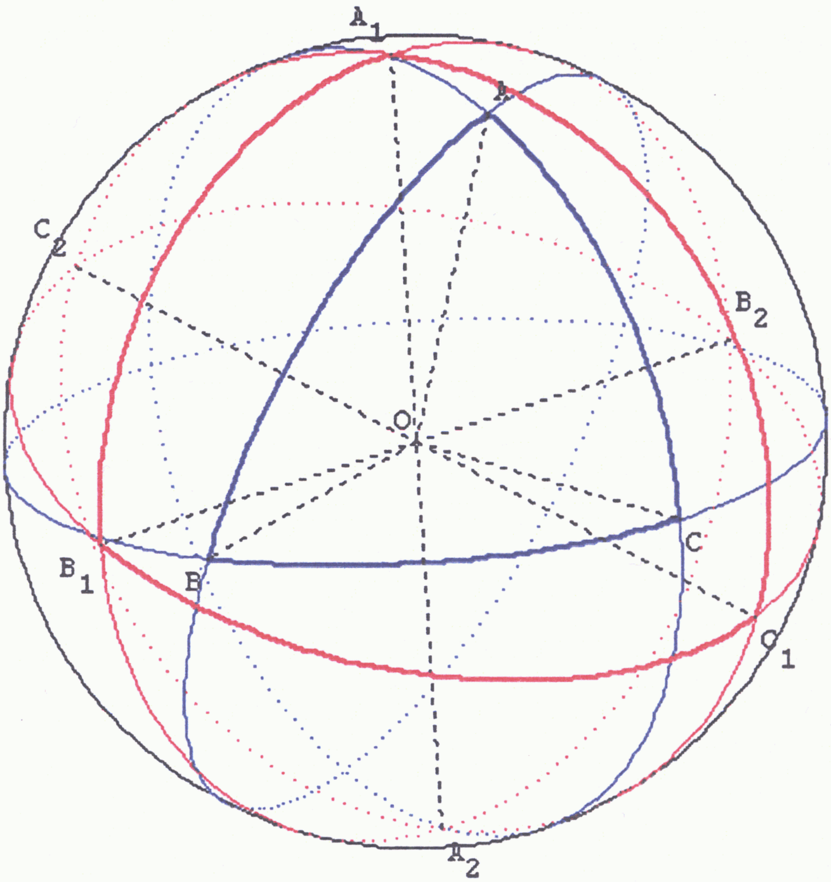
Denoville obtient ainsi 2 $\text{LDsin}\dfrac{180-a}{2}$ = 1 988 506, qui divisé par 2, donne $\text{LDsin}\dfrac{180-a}{2}$ = 994 253. Il en déduit, grâce aux tables $\dfrac{180-a}{2}$ = 61°10', qu'il double (122°20') et dont il considère le supplémentaire qui donne l'azimut $a = 57°40'$.

Annexes

XXIV. Triangles sphérique et polaire en couleur



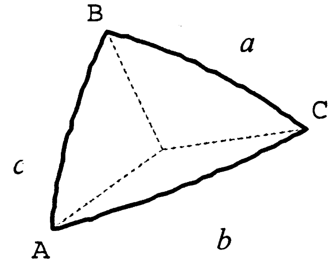
Le triangle sphérique *ABC* et les pôles A_i et B_i



Le triangle sphérique *ABC* et son triangle sphérique polaire associé $A_1B_1C_1$

Formulaire de trigonométrie sphérique

On considère un triangle sphérique ABC dont les côtés a, b, c et les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont compris au sens strict entre 0° et 180°.



La formule des cosinus liant les trois côtés et un angle

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A}$

La formule duale des cosinus liant les trois angles et un côté

(4) $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos a$

La formule des sinus liant deux angles et deux côtés en vis à vis

(7) $\dfrac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{\sin c}$

Autres formules multiplicatives liant quatre éléments du triangle (les trois côtés et un angle ou les trois angles et un côté)

(8) $\sin^2\left(\dfrac{\widehat{A}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sin b \sin c}\sin(p-b)\sin(p-c)$ où p désigne le demi-périmètre du triangle sphérique

(11) $\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{\sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}\cos\left(S-\widehat{B}\right)\cos\left(S-\widehat{C}\right)$ où S désigne la demi-somme des angles du triangle sphérique

Autres formules liant cinq éléments du triangle (les trois côtés et deux angles ou les trois angles et deux côtés)

(14) $\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \widehat{C} = \sin c \cos \widehat{A}$

(15) $\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \widehat{C} = \sin c \cos \widehat{B}$

(16) $\cos \widehat{A} \sin \widehat{B} + \sin \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos c = \sin \widehat{C} \cos a$

(17) $\cos \widehat{B} \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{A} \cos c = \sin \widehat{C} \cos b$

Autres formules liant deux côtés et deux angles non en vis à vis

(18) $\cot a \sin b - \cot \widehat{A} \sin \widehat{C} = \cos b \cos \widehat{C}$

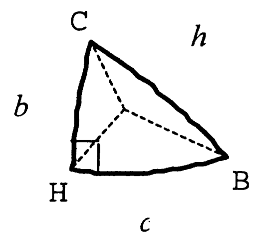
(19) $\cot b \sin a - \cot \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos a \cos \widehat{C}$

(20) $-\cot \widehat{A} \sin \widehat{B} + \cot a \sin c = \cos \widehat{B} \cos c$

(21) $-\cot \widehat{B} \sin \widehat{A} + \cot b \sin c = \cos \widehat{A} \cos c$

Formules spécifiques au triangles sphériques rectangles

On considère un triangle sphérique rectangle *HBC* rectangle en *H* dont l'hypoténuse est *h* et dont les côtés *b* et *c* de l'angle droit et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont différents de 90°. $\widehat{B}$ et *b* sont de la même nature (tous les deux aigus ou tous les deux obtus), $\widehat{C}$ et *c* aussi.



Formule liant les trois côtés

(1') $\cos h = \cos b \cos c$

Formule liant les trois angles

(4') $\cos h = \cot\widehat{B}\cot\widehat{C}$

Formule liant l'hypoténuse un angle autre que le droit et son côté adjacent

(2') $\tan c = \tan h \ \cos\widehat{B}$

Formule liant l'hypoténuse un angle autre que le droit et son côté opposé

(7') $\sin b = \sin h \ \sin\widehat{B}$

Formule liant un angle autre que le droit et les deux côtés de l'angle droit

(2'') $\tan c = \sin b \ \tan\widehat{C}$

Formule liant un côté de l'angle droit et les deux angles autres que le droit

(5') $\cos\widehat{B} = \sin\widehat{C}\cos b$

L'angle B du triangle A B C est

- *droit, dont le triangle est de la 6 reigle.*
- *oblique, avec l'angle* C
  - *aigu, ayant le costé* A C
    - *egal avec* A B, *dont le triangle est de la 5 reigle.*
    - *(estant inegal avec* A B)
      - *d'un quart de cercle, dont le triangle est de la 8 reigle.*
      - *plus petit que le quart d'un cercle, &* A B
        - *plus grand que* A C, *dont le triangle est de la 1 reigle.*
        - *plus petit que* A C, *dont le triangle est de la 9 reigle.*
      - *plus grand que le quart d'un cercle, &* A B
        - *plus petit que la difference entre* A C *& le demicercle, dont le triangle est de la 11 reigle.*
        - *point plus petit que la difference entre* A C *& le demicercle, dont le triangle est de la 3 reigle.*
  - *obtus, ayant le costé* A C
    - *egal avec* A B, *dont le triangle est de la 5 reigle.*
    - *(estant inegal avec* A B)
      - *plus petit que le quart d'un cercle, &* A B.
        - *plus grand que la difference entre* A C *& le demicercle, dont le triangle est de la 12 reigle.*
        - *plus petit que la difference entre* A C *& le demicercle, dont le triangle est de la 4 reigle.*
      - *plus grand que le quart d'un cercle, &* A B
        - *plus petit que* A C, *dont le triangle est de la 2 reigle.*
        - *plus grand que* A C, *dont le triangle est de la 10 reigle.*

Traduction de l'organigramme précédent

- $\widehat{B}$ est
  - droit *règle (6)*
  - non droit et $\widehat{C}$ et
    - aigu et
      - $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$ *règle (5)* et $\widehat{B} = \widehat{C}$
      - $\overset{\frown}{AC} \neq \overset{\frown}{AB}$ et
        - $\overset{\frown}{AC} = 90°$ *règle (8)*
        - $\overset{\frown}{AC} < 90°$ et
          - $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AC}$ *règle (1)*
          - $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC}$ *règle (9)*
        - $\overset{\frown}{AC} > 90°$ et
          - $\overset{\frown}{AB} < 180° - \overset{\frown}{AC}$ *règle (11)*
          - $\overset{\frown}{AB} > 180° - \overset{\frown}{AC}$ *règle (3)* et $\widehat{B}$ obtus
    - obtus et
      - $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$ *règle (5)* et $\widehat{B} = \widehat{C}$
      - $\overset{\frown}{AC} \neq \overset{\frown}{AB}$ et
        - $\overset{\frown}{AC} < 90°$ et
          - $\overset{\frown}{AB} > 180° - \overset{\frown}{AC}$ *règle (12)*
          - $\overset{\frown}{AB} < 180° - \overset{\frown}{AC}$ *règle (4)* et $\widehat{B}$ aigu
        - $\overset{\frown}{AC} > 90°$ et
          - $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC}$ *règle (2)* et $\widehat{B}$ obtus
          - $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AC}$ *règle (10)*

Sources bibliographiques et iconographiques

Sources bibliographiques

HADAMARD J., *Leçons de géométrie II géométrie dans l'espace*, 1901, réédité par Jacques Gabay , 1988
AMIOT A., *Éléments de géométrie*, Delagrave, 1870 (disponible sur Gallica)
SERRET J.-A., *Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Gautier-Villars, 1880, réédité par Jacques Gabay, 1992(disponible sur Gallica)
LEGENDRE A.M. *Éléments de géométrie*, F. Didot, 1817 (disponible sur Gallica)
STEVIN Simon, *Mémoires mathématiques* traduit par TUNING(Leyde 1608) (consultable à la BM de Rouen)
STEVIN Simon *Les œuvres mathématiques* revu, corrigé, et augmenté par Albert GIRARD (Leyde 1634) (téléchargeable. Réserve ancienne Lille)
DENOVILLE J.-B., *Traité de navigation* manuscrit, 1760 (consultable à la BM de Rouen)

Sources iconographiques

PETIT J-P., *Le Géométricon*, Belin, 1988
BLOSSIER M., pour les dessins de cet ouvrage.

C'était tout ce que nous voulions savoir sur la trigonométrie sphérique

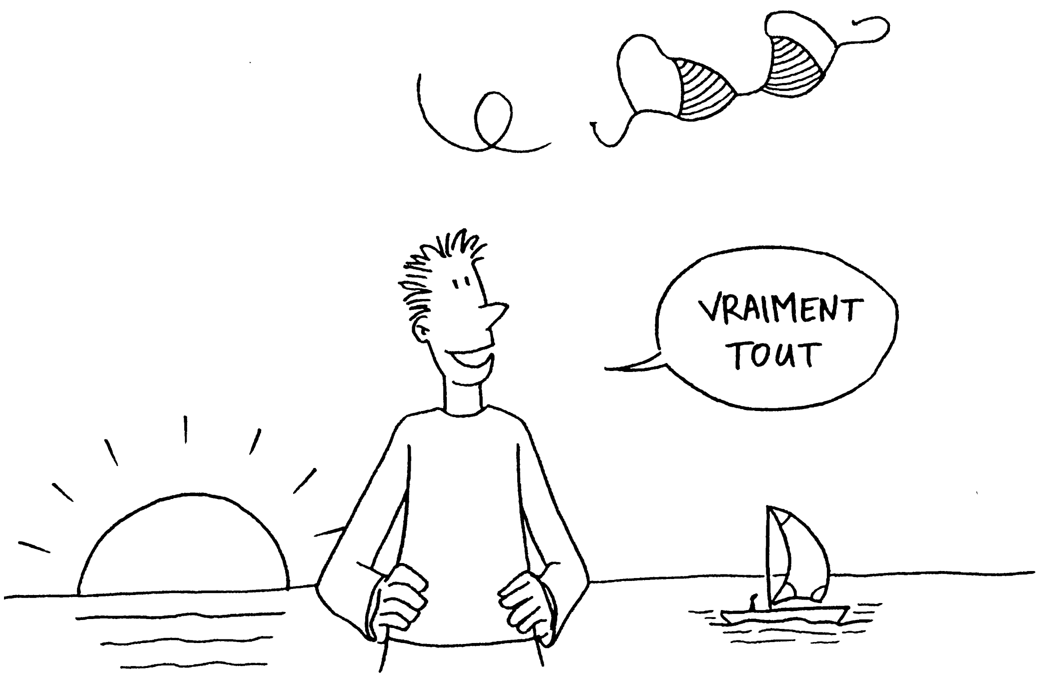


TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

Merci à Elisabeth Hébert et Christian Vassard qui m'ont donné le goût de l'astronomie, puis m'ont fait confiance pour relever ce défi : réaliser un cours de trigonométrie sphérique !

Merci à Matthieu Blossier pour ses dessins qui rendent moins indigestes les triangles sphériques, et leurs triangles polaires en particulier !

Merci à tout le groupe IREM (Elisabeth, Christian, Sylvie, Matthieu) qui ont patiemment supporté mes exposés , ont relu ce texte, et l'ont enrichi de leurs précieuses remarques !

Un grand merci à Christian Vassard pour son assistance technique ô combien utile !

Merci au Soleil, aux étoiles, et aux chauves-souris !!!

Ref : R 136

Titre : Notions de trigonométrie sphérique et exemples d'utilisation

Auteur : Catherine Philippe

Public visé : Enseignants, étudiants, astronomes amateurs

Résumé : Que dire d'un triangle tracé sur une sphère ? Comment mesurer les angles et les côtés d'un tel triangle ? Quelle trigonométrie fait-on sur une sphère ? Cette brochure tente de répondre à ces questions. Les propriétés des triangles sphériques et les formules de trigonométrie sphériques sont démontrées de façon élémentaire, avec les outils dont dispose un élève de Première S. Les professeurs de ces classes y trouveront matière à des TPE.
Une approche historique a paru intéressante : la démarche de Stevin est présentée et étudiée. Enfin des exemples de résolution de triangles sphériques en astronomie et en navigation sont détaillés. Les chapitres sont les suivants :

Triangles sphériques
Formule et résolution de triangle
La trigonométrie sphérique au XVI$^{\text{ème}}$ siècle
Utilisation de la trigonométrie sphérique en navigation

Mots clés : sphère, cercle, triangle sphérique, triangle sphérique polaire, trigonométrie sphérique, formule des sinus, formule des cosinus, résolution de triangle

Nombre de pages : 114

Prix : 10 €

N° ISBN : 978-2-86239-092-5

Publication : IREM, UFR des sciences, Université de Haute-Normandie
Bâtiment de Mathématiques
Avenue de Broglie BP 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

Bon de commande à retourner à

IREM, UFR des sciences, Université de Haute-Normandie
Bâtiment de Mathématiques
Avenue de Broglie BP 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

M, Mme ....
Adresse ....
....
....
Quantité ....
Prix à payer nombre d'exemplaires .... × 10 + frais de port : 1,57€ + 0,80€ par livre supplémentaire

Date : .... Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent comptable de l'Université de Rouen