Supplément au manuscrit de Denoville

Traité des triangles sphériques contenant la doctrine des triangles sphériques rectangles et obliques ensemble géométrique logarithme instrumentaux.

Voici le plan de ce petit supplément au manuscrit de Denoville :
Section première : géométrie sphérique expliquée par définitions et problèmes (pages 1 à 9)
    Neuf problème numérotés 1 à 9
Section deuxième (pages 10 à 13)
    Cinq problèmes numérotés 10 à 15
Section troisième : des affections ou propriétés naturelles des triangles sphériques (pages 13 et 14)
    Listes de quatorze propriétés
Section quatrième : La résolution des seize questions des triangles sphériques rectangles par la proposition catholique du Seigneur Napier(pages 14 à 20)
    Enoncé de la proposition et résolution de six problèmes

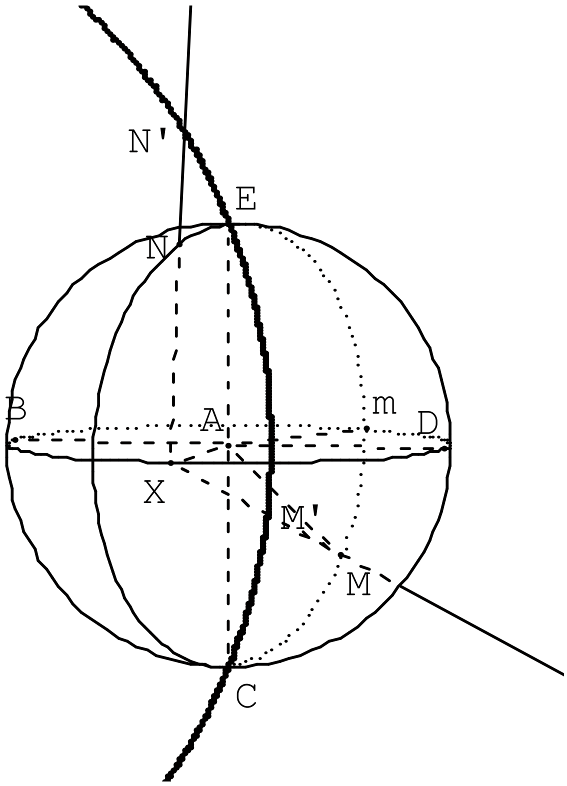
La fin du document est consacrée aux triangles sphériques quelconques
De la section deuxième (suite de la section deuxième où on construit des triangles obliques) (pages 21 à 23)
    Six problèmes numérotés 16 à 21
Section cinquième : Les quatre axiomes suivants par lesquels les douze questions suivantes des triangles sphériques obliques sont résolues (page 23 à 28)

Remarques générales
La lecture est difficile. La fin et le début de chaque page sont légèrement tronqués. L'orthographe et le vocabulaire ne sont pas stables. Il s'agit en fait de la traduction en Français du chapitre V d'un ouvrage de navigation *Epitome of the art of navigation* publié à Londres en 1770, de James Atkinson. L'ordre des sections (ainsi appelées par Atkinson) est légèrement perturbée ; la section deuxième est d'un seul tenant chez Atkinson mais est morcelée en deux parties par Denoville. La première partie de cette section est consacrée aux triangles sphériques rectangles et la deuxième aux triangles sphériques quelconques (*obliques*).
Tous les exemples traités, et même certaines définitions, se réfèrent à des figures regroupées sur des planches qui ne figurent pas dans le document... ce qui rend la lecture et la compréhension difficiles.
La proposition catholique qui permet la résolution des triangles sphériques rectangles correspond à six formules de trigonométrie sphériques.
Les quatre axiomes permettant de résoudre les triangles sphériques obliques sont 1) la formule des sinus, 2) les deux formules multiplicatives donnant respectivement la tangente de la demi-somme et de la demi-différence de deux angles en fonction de leurs côtés opposés et du troisième angle, traditionnellement appelées formules de Neper et 3) la formule multiplicative donnant le carré du cosinus d'un demi-angle en fonction des trois côtés.
Aucune des formules n'est démontrée. La présentation et l'énoncé de ces formules sont aussi ceux de Seller. Seule leur numérotation change.
Curieusement, certaines des formules présentées ici ne sont pas du tout utilisées dans le chapitre consacrées à la résolution des questions astronomiques par les sinus logarithmes dans le manuscrit (page 193).

Section première : géométrie sphérique expliquée par définitions et problèmes
Denoville introduit cette partie par la phrase suivante *: Avant que d'entrer sur la trigonométrie sphérique ainsi qu'en l'ouvrage de proportion qui en dépend il est nécessaire que vous entendiez la manière de faire un triangle sphérique et d'en mesurer chacune de ses parties. C'est pourquoi j'ai défini les problèmes suivants dans l'ordre de ceux que j'appelle géométrie sphérique.*

1) *La géométrie sphérique est ce qui enseigne la manière de décrire les cercles de la sphère ou les projeter sur un plan ou sur des superficies plates.*
2) *La sphère ou globe est un corps rond fait par le mouvement d'un demi-cercle autour de son propre diamètre.* Cette définition dynamique de la sphère n'est pas celle donnée par centre et rayon dans le manuscrit proprement dit.
3) *La projection de la sphère est orthographique, stéréographique ou gnomonique*.
4) *La projection orthographique est de tirer la superficie de la sphère sur un plan qui la coupe dans le milieu, l'œil étant placé perpendiculairement à lui et à une distance infinie. Cette projection fait seulement usage des lignes de corde et sinus.*
5) *La projection stéréographique enseigne la manière de décrire la superficie de la sphère sur un plan qui la coupe dans le milieu, l'œil étant placé dans la superficie de la sphère perpendiculairement au centre de son dit plan.*
6) *La projection gnomonique de la sphère est tirer la superficie sur un plan qui la représente, l'œil étant placé au centre de la sphère*.
7) *Ces deux dernières* (projections) *font usage des lignes de corde, tangente, et sécante. Tous les cercles de la sphère sont des grands cercles ou des moindres cercles*.
8) *Le plan sur lequel est projetée la sphère est le centre qui termine ou limite la projection et est représentée par le cercle ABCDEBA*.
Cette phrase est censée être illustrée par la planche première figure première.
J'imagine que le point *A* est le projeté du centre de la sphère et les points *BCDE* sont sur le cercle qui représente la sphère projetée. Ces quatre points sont espacés de 90°. [*BD*] et [*CE*] sont deux diamètres perpendiculaires en *A*.
9) *Un grand cercle est un cercle primitif, ou cercle droit, ou cercle oblique*.
Les définitions de ces trois types de cercles sont très peu claires et sont données par les figures qui les représentent, figures non présentes dans le document. Je dirais que le cercle primitif est le cercle *BCDE* invariant dans la projection stéréographique de centre *A*. ; dans la projection orthographique, les parallèles de la sphère sont projetés en segments et les méridiens en ellipses ; dans la projection stéréographique, parallèles et méridiens de la sphère sont projetés en des arcs de cercle, les projetés des méridiens sont des

arcs de cercles limités par les deux pôles diamétralement opposés de la sphère. D'après Denoville, un cercle droit se projette en un diamètre comme *BAD*, tandis qu'un cercle oblique se projette comme un arc de cercle *BFD* de centre *Y* , ce qui laisse à penser que les figures auxquelles il se réfèrent dans son manuscrit sont plutôt des projections stéréographiques de la sphère.
La projection orthographique est présentée dans le chapitre consacré au quartier sphérique, qui est précisément la projection orthographique d'un huitième de sphère céleste.
Examinons la projection stéréographique d'une sphère. Soit la sphère de centre *A* de rayon 1 tracée dans le repère orthonormé *Axyz* ; on projette cette sphère selon la projection stéréographique sur le plan *Ayz* par rapport au centre de projection, le point *X*(1, 0, 0) situé sur la sphère, de sorte que la droite (*AX*) est perpendiculaire en *A* au plan de projection. Le point *X* n'a pas d'image.



Le point *M* de coordonnées $\left(\cos\beta\sin\alpha, \cos\beta\cos\alpha, \sin\beta\right)$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ de la sphère se projette en *M'* intersection du plan de projection et de la demi-droite [*XM*) et *M'* a alors pour coordonnées $\left(0, \dfrac{\cos\beta\cos\alpha}{1-\cos\beta\sin\alpha}, \dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta\sin\alpha}\right)$. Les angles α et β sont respectivement les « longitude et latitude » de *M* c'est à dire précisément $\alpha = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{Am}\right)$ et $\beta = \left(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{AM}\right)$, *m* étant le point d'intersection du méridien *EMD* et du plan horizontal *Axy*.
Le cercle *BCDE* (*primitif* selon Denoville) contenu dans le plan de projection est invariant. La demi-sphère limitée par ce cercle et qui ne contient pas le point *X* est projeté selon le disque limité par ce cercle, tandis que l'autre demi-sphère se projette à l'extérieur de ce disque.
Le grand cercle *BMD* correspondand à α = constante, (*oblique* selon Denoville) se transforme en le cercle *BM'D* de centre $\left(0, \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.
Le cercle équateur se transforme en le segment [*BAD*] ; ce cercle est dit *droit* par Denoville.

Problème 1 : *Trouver le pôle d'un grand cercle.*
Denoville explique comment construire un pôle d'un cercle primitif, droit ou oblique.

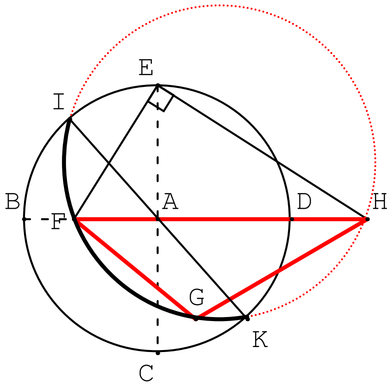
Denoville définit l'angle sphérique :
Un angle sphérique FE se fait par l'intersection de deux grands cercles, l'intersection étant le point angulaire.

Les problèmes qui suivent expliquent comment construire ou mesurer des angles sphériques.

Problème 2 question 1 : *Faire un angle sphérique dont le point angulaire puisse être au centre du cercle primitif.* (le sommet de l'angle se projette en *A* comme le centre de la sphère.)
Problème 2 question 2 : *Faire un angle sphérique dont le point angulaire puisse être au cercle primitif.* (le sommet de l'angle se projette en un point du cercle primitif.)

Problème 3 : *Tirer un grand cercle par quelque point donné de sorte qu'il puisse faire avec le cercle primitif un angle donné.*

Problème 4 : *Tirer un grand cercle par deux points donnés quelconques, soit tous deux à l'intérieur du cercle primitif, soit l'un dedans et l'autre dehors.*
Denoville explique ici comment dessiner un arc de cercle contenant deux points *F* et *G* intérieurs au cercle primitif projection de la sphère et qui coupe le cercle primitif en deux points diamétralement opposés. Voici la construction telle que je l'ai comprise, aucune figure n'étant jointe au texte :



L'arc de cercle $\widehat{IK}$ qui passe par les points *F* et *G* est un morceau du cercle circonscrit au triangle *FGH* et *H* est le point de l'équateur *BD* tel que *BEH* soit rectangle en le pôle *E*. Les points *I* et *K* sont diamétralement opposés sur le cercle primitif *BEDC*. La chose est facile à justifier analytiquement en travaillant dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Problème 5 question 1 : *Tirer un grand cercle perpendiculaire au cercle primitif.*
Problème 5 question 2 : *Tirer un cercle droit perpendiculairement à un cercle droit donné.*
Problème 5 question 3 : *Tirer un cercle oblique perpendiculaire à un cercle droit donné.*
Problème 5 question 4 : *Tirer un cercle oblique perpendiculaire à un cercle donné.*

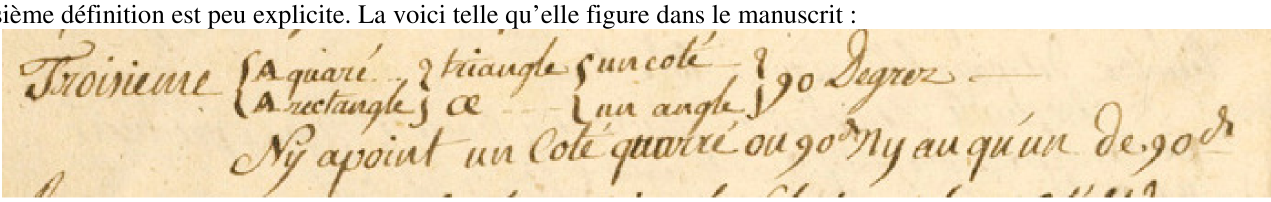
Problème 6 question 1 : *Mettre une quantité de degré sur un cercle droit.*
Problème 6 question 3 : *Mettre une quantité de degré sur un cercle oblique.*

Problème 7 question 1 : *Mesurer quelque partie du cercle primitif.*
Problème 7 question 2 : *Mesurer une partie du cercle droit.*
Problème 7 question 3 : *Mesurer quelque partie d'un cercle oblique.*

Problème 8 question 1 : *Mesurer un angle* [sphérique] *quand son point angulaire est au centre du cercle primitif.*
Problème 8 question 2 : *Mesurer un angle* [sphérique] *quand son point angulaire est au* [sur le]*cercle primitif.*
Problème 8 question 3 : *Mesurer un angle* [sphérique] *quand son point angulaire n'est point au centre ni au cercle primitif.*
Problème 8 question 4 : *Mesurer un angle* [sphérique] *quand les deux côtés contenant sont cercles obliques.*

Problème 9 question 1 : *Tirer un cercle parallèle à un cercle primitif à quelque distance de lui ou de son pôle.*
Problème 9 question 2 : *Tirer un cercle parallèle à un cercle droit.*
Problème 9 question 3 : *Tirer un cercle parallèle à un cercle oblique.*

Deuxième section
Denoville donne trois définitions : celle de la sphère déjà donnée au début mais complétée, celle du triangle sphérique, celle des triangles sphériques particuliers.
Une sphère ou globe est un corps rond fait par le mouvement d'un demi-cercle autour de son propre diamètre jusqu'à ce que la motion finisse là où elle commence ; le demi-diamètre du demi-cercle est l'axe ou diamètre de la sphère dans le milieu de laquelle est un point appelé le centre d'où toutes lignes droites tirées à la surface ou sur le côté de la sphère sont égales.
Un triangle sphérique est décrit sur la surface de la sphère dont les côtés sont des arcs de trois grands cercles mutuellement interceptant l'un et l'autre. [un triangle sphérique est] *ou quarré ou rectangle ou oblique.*
La troisième définition est peu explicite. La voici telle qu'elle figure dans le manuscrit :


Troisieme {A quarré / A rectangle} triangle {sur coté / a un angle} 90 Degrez
Ny a point un Coté quarré ou 90d Ny au qu'un de 90d

Faut-il comprendre qu'un triangle sphérique est dit carré s'il a un côté égal à un quart de cercle ou quadrant, que Denoville nomme *quarré* (on dit triangle sphérique rectalère) et rectangle s'il a un angle de 90° ? Quant à la dernière phrase *N'y a point un côté carré ou 90° ni aucun* [angle] *de 90°* est ce ce qui définit le triangle sphérique oblique ?

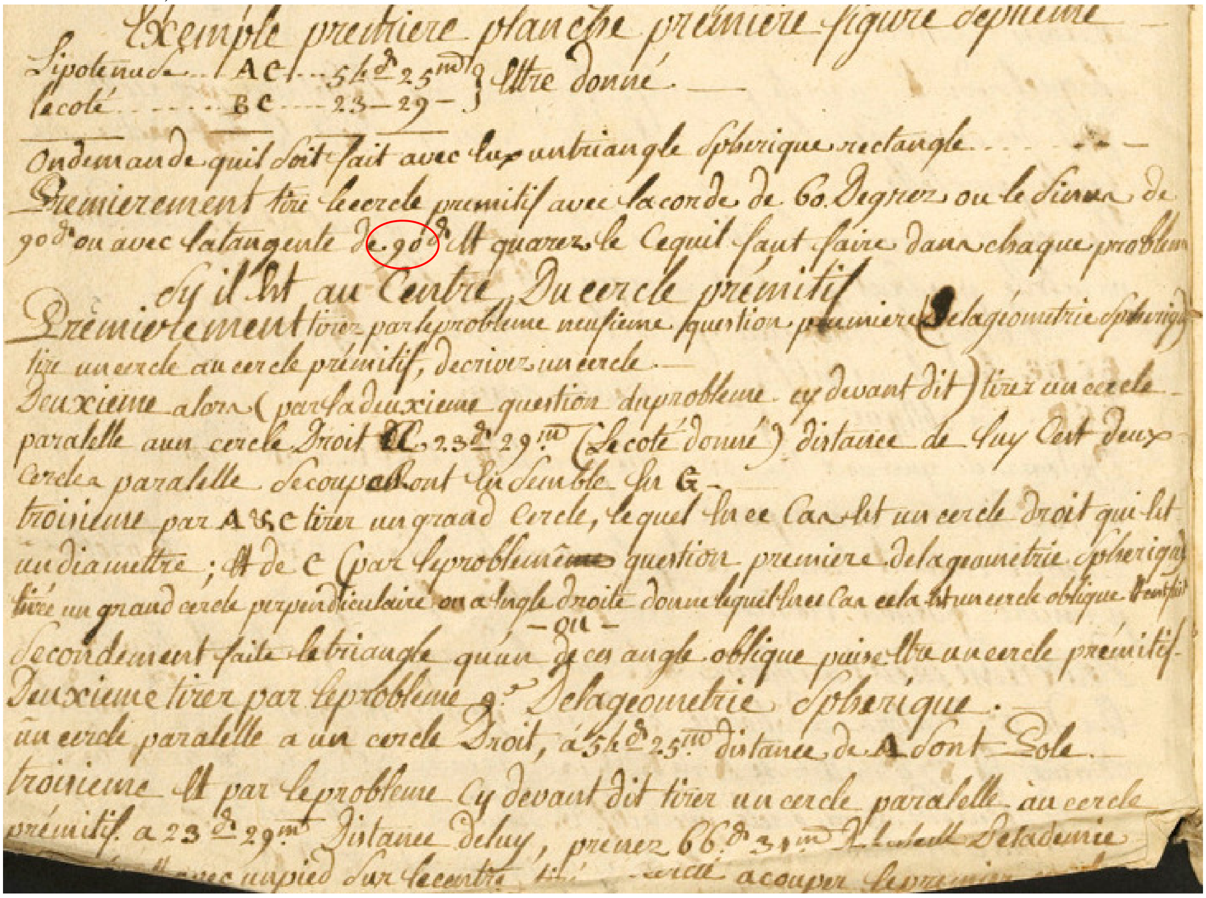
Suivent quatre remarques :
En chaque triangle sphérique chaque côté est [moindre q'un] *demi-cercle ou 180°.*
La somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté.
La somme des trois côtés étant additionnés ensemble leur somme est moins que 360°.
La somme des trois angles est toujours plus que deux droits ou 180° mais toujours moins que six droits ou 540 degrés.

Suivent six problèmes de constructions de triangle sphérique rectangle. La construction étant effectuée (il s'agit selon toute vraisemblance de la projection stéréographique du triangle), Denoville demande systématiquement de mesurer les côtés et angles du triangle, en utilisant les problèmes précédents. Le commentaire de Denoville se réfère à une figure qui figurait sur des planches disparues, ce qui rend fort malaisée la compréhension de l'algorithme de construction.

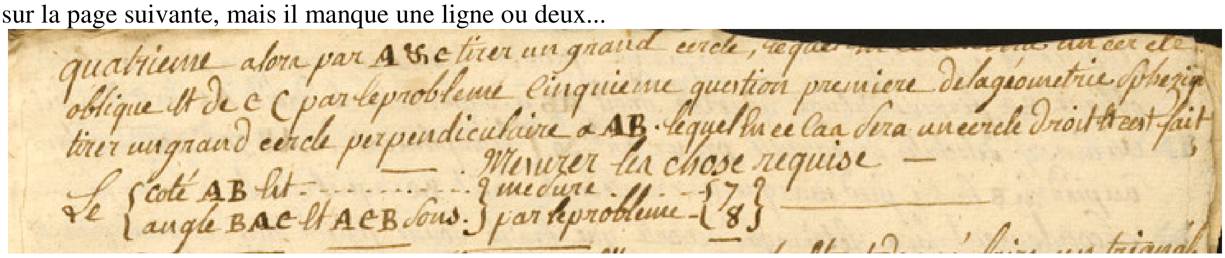
Problème 10 : *L'hypoténuse et un côté étant donnés, faire un triangle sphérique rectangle*

Observons la résolution de Denoville, dont la lecture est difficile :

Tangente de 45° et non de 90°, qui représente le rayon



Le texte se poursuit sur la page suivante, mais il manque une ligne ou deux...



Problème 11 : *L'hypoténuse et un angle étant donnés, faire un triangle sphérique* [rectangle].

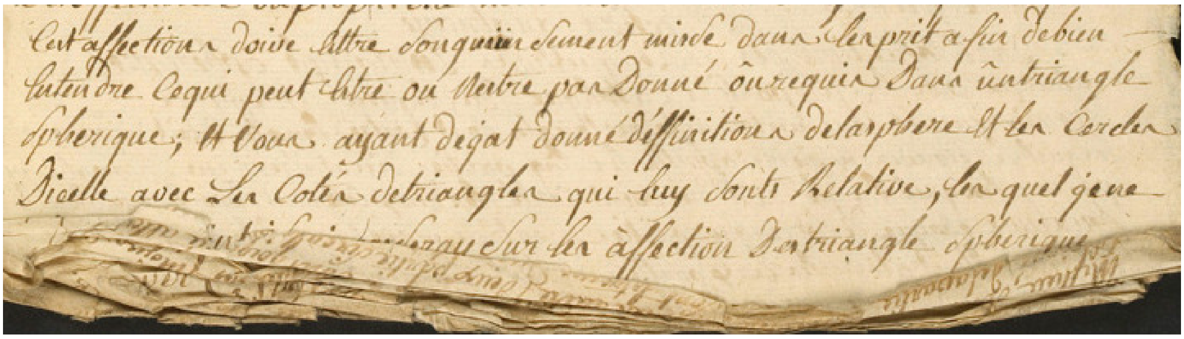
Problème 12 : *Un côté et son angle* adjacent *étant donnés, faire un triangle sphérique* [rectangle].
Denoville écrit *droit* au lieu de adjacent ; l'exemple qu'il propose de traiter a comme données : côté *AB* = 50°30' et angle *BAC* = 29°30'.

Problème 13 : *Un côté et son angle opposé étant donnés, faire un triangle sphérique* [rectangle].

Problème 14 : *Les côtés ensemble donnés, faire un triangle sphérique* [rectangle].
On donne ici les deux côtés de l'angle droit.

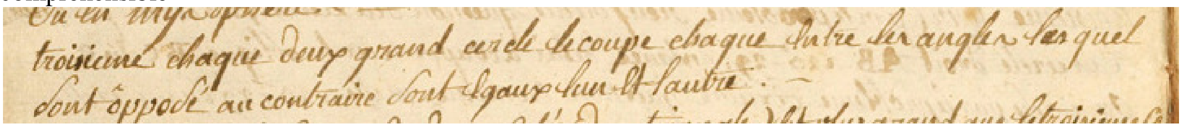
Problème 15 : *Deux angles étant donnés, faire un triangle sphérique* [rectangle].
On donne ici les deux angles non droits.

Section troisième : des affections ou propriétés naturelles des triangles sphériques
Ces affections doivent être [adverbe illisible] *mises dans l'esprit afin de bien entendre ce qui peut être ou n'être pas donné ou requis dans un triangle sphérique.*

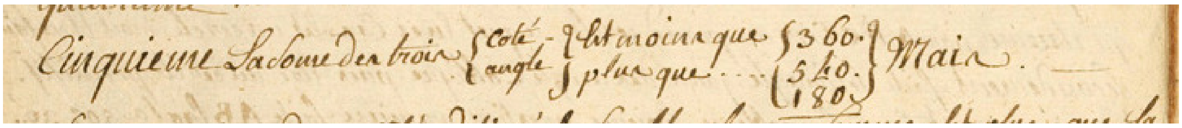


Suivent 14 propriétés concernant la nature des côtés et angles d'un triangle sphérique. La rédaction en est pour le moins confuse et difficile à suivre, voire impossible.

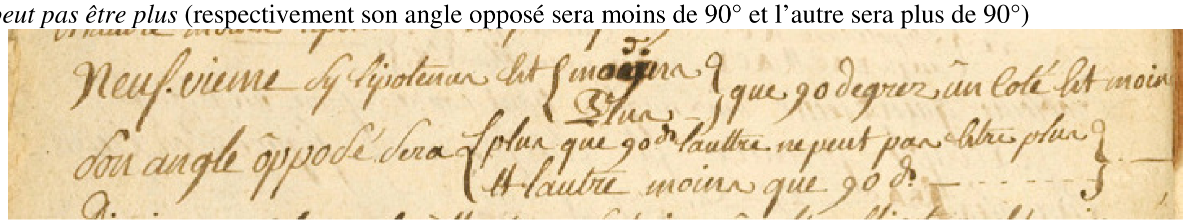
1) *Chaque côté est un arc de grand cercle moindre qu'un demi-cercle.*
2) *Chaque grand cercle divise la sphère en deux parties égales ou hémisphères.*
3) Phrase incompréhensible



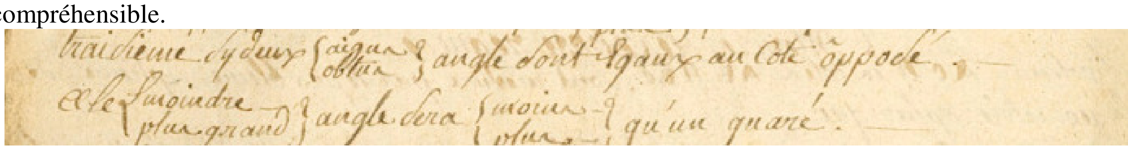
On pourrait traduire par : deux grands cercles se coupent selon des angles sphériques égaux…
4) *La somme des deux côtés est plus grande que le troisième côté.*
5) La somme des trois côtés (respectivement angles) est moins que 360° (respectivement 540°) mais plus que 180°.
Ce que Denoville écrit ainsi :



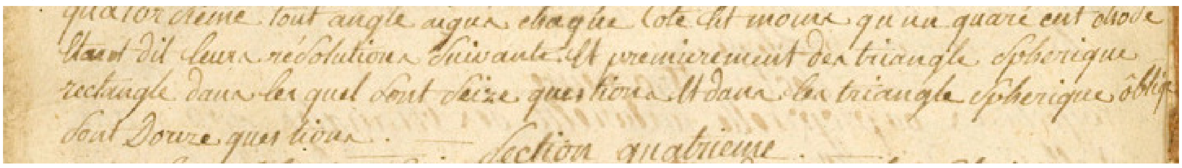
6) *Quelques deux côtés additionnés ensemble, leur somme est plus grande que la différence entre le troisième angle et 180°*
7) *Dans un triangle rectangle les côtés et leurs angles opposés sont de même affection qui est si un côté est plus ou moins qu'un quarré, l'angle opposé est pareillement plus ou moins qu'un angle droit.*
8) *Dans un triangle rectangle, si un côté est un carré l'hypoténuse sera un quarré, mais si ensemble les deux côtés sont de même affection, l'hypoténuse est moins qu'un quarré(...) mais si un côté est plus de 90° et l'autre moins l'hypoténuse est plus de 90°.*
9) Cette phrase confuse comporte semble-t-il une erreur.
Si l'hypoténuse est moins que 90° (respectivement plus de 90°) *et un côté moins* [de 90°], *son angle opposé sera* **moins** *de 90° et l'autre ne peut pas être plus* (respectivement son angle opposé sera moins de 90° et l'autre sera plus de 90°)



10) *Si les angles* [adjacents] *à l'hypoténuse sont aigus ou obtus, l'hypoténuse est moins qu'un quarré, mais si l'un est aigu et l'autre obtus, l'hypoténuse est plus qu'un quarré*
11) *En chaque triangle les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles, les côtés égaux* [sont opposés] *aux angles égaux.*
12) *En chaque triangle oblique deux angles aigus* (respectivement obtus) *étant égaux, leurs côtés opposés sont égaux et moins* (respectivement plus) *qu'un quarré.*
13) Phrase incompréhensible.



14) Phrase mystérieuse : *Tout angle aigu chaque côté est moins qu'un quarré.* Denoville veut sans doute dire que si les trois angles sont aigus, alors les trois côtés sont moindres que 90°.
Cette dernière phrase est suivie sans ponctuation de l'annonce de la suite : *Ces choses étant dites leur résolution suivante est premièrement des triangles sphériques rectangles dans laquelle sont seize questions et dans les triangles sphériques obliques sont douze questions.*



Section quatrième : La résolution des seize questions des triangles sphériques rectangles par la proposition catholique du Seigneur Napier

Selon Neper un triangle sphérique rectangle comporte outre l'angle droit (de sommet B) cinq parties circulaires : les deux angles de sommets A et C et les trois côtés, dont l'hypoténuse AC. Ces cinq parties interviennent dans des lois de proportionnalité. Précisément il existe plusieurs règles de proportionnalité reliant le rayon et trois de ces cinq parties. Neper propose une présentation commode permettant d'unifier et de retenir ces règles. Chacune des cinq parties circulaires (l'angle droit n'est pas compté) peut être prise pour la partie médiane, deux des cinq autres sont appelées parties extrêmes conjointes et les deux dernières extrêmes disjointes.

Par exemple si la partie médiane est le côté $\widehat{AB}$ de l'angle droit de sommet B, les extrêmes conjoints sont celles des cinq parties qui joignent ce côté, c'est à dire l'angle de sommet A et le côté $\widehat{BC}$.

La proposition catholique rapportée par Denoville est donnée ainsi : *Le sinus de la partie du milieu et le rayon sont réciproquement proportionnels avec la tangente des extrêmes conjoints et avec le sinus-complément des extrêmes disjoints.*

Mais la règle comporte des exceptions : *Si la partie du milieu ou chacun des extrêmes conjoints est l'hypoténuse ou chacun des angles obliques, au lieu de sinus et de tangente il faut user de sinus-complément et tangente-complément.*

Si chacun des extrêmes disjoints est l'hypoténuse ou chacun des angles obliques, au lieu de sinus-complément il faut user de sinus.

Cette phrase s'accompagne d'un tableau à cinq lignes donnant pour chacune, les lignes trigonométriques des parties médianes possibles, les lignes trigonométriques des deux extrêmes conjoints et les lignes trigonométriques des deux extrêmes disjoints associés évoquées dans la proposition catholique. Ce tableau que l'on retrouve presque à l'identique chez Seller comporte une coquille à la première ligne : la première partie médiane est le sinus du côté AB, et non le sinus de A comme le note Denoville.

Table de toutes les variétés des extrêmes conjoints et disjoints

Nombre	*Partie du milieu*	*Extrêmes conjoints*	*Extrêmes disjoints*
1	sinus $\widehat{AB}$	tangente $\widehat{BC}$ tangente-complément $\widehat{BAC}$	sinus $\widehat{ACB}$ sinus $\widehat{AC}$
2	sinus-complément $\widehat{BAC}$	tangente-complément $\widehat{AC}$ tangente $\widehat{AB}$	sinus-complément $\widehat{BC}$ sinus $\widehat{ACB}$
3	sinus-complément $\widehat{AC}$	tangente-complément $\widehat{BAC}$ tangente-complément $\widehat{ACB}$	sinus-complément $\widehat{BC}$ sinus-complément $\widehat{AB}$
4	sinus-complément $\widehat{ACB}$	tangente-complément $\widehat{AC}$ tangente $\widehat{BC}$	sinus $\widehat{BAC}$ sinus-complément $\widehat{AB}$
5	sinus $\widehat{BC}$	tangente $\widehat{AB}$ tangente-complément $\widehat{ACB}$	sinus $\widehat{BAC}$ sinus $\widehat{AC}$

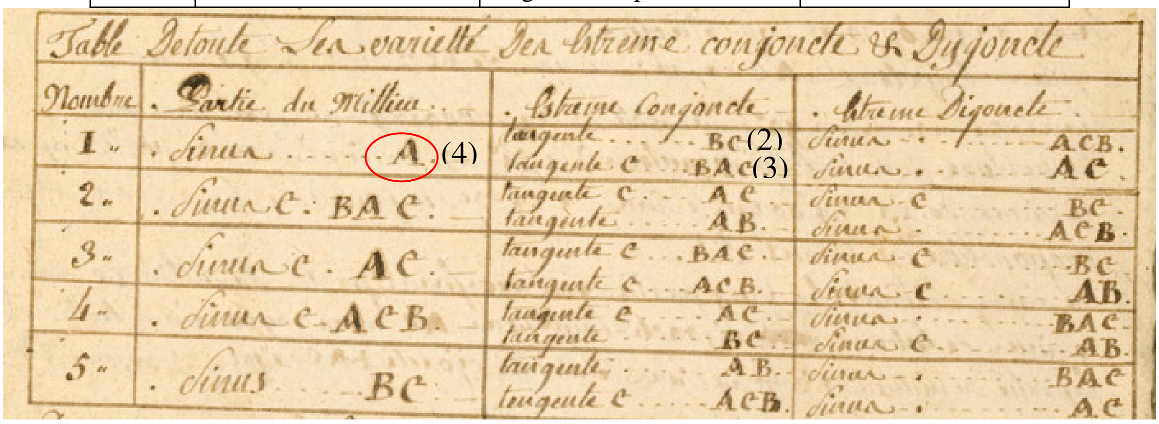


Table Detoute Les variettés Des Extreme conjoncte & Dyjoncte

Nombre	Partie du Millieu	Extreme Conjoncte	Extreme Disjoncte
1	Sinus ... A (4)	tangente ... BC (2) tangente C ... BAC (3)	Sinus ... ACB Sinus ... AC
2	Sinus C. BAC	tangente C ... AC tangente ... AB	Sinus C ... BC Sinus ... ACB
3	Sinus C. AC	tangente C ... BAC tangente C ... ACB	Sinus C ... BC Sinus C ... AB
4	Sinus C. ACB	tangente C ... AC tangente ... BC	Sinus ... BAC Sinus C ... AB
5	Sinus ... BC	tangente ... AB tangente C ... ACB	Sinus ... BAC Sinus ... AC

En langage moderne comment s'expriment ces règles de proportionnalité ? Et à quelles formules correspondent-elles ?

Le sinus de la partie du milieu et le rayon sont réciproquement proportionnels avec la tangente des extrêmes conjoints est traduit ainsi par Denoville :

Comme le rayon est à la tangente d'un extrême, ainsi la tangente de l'autre est au sinus de la partie du milieu. Les trois lignes trigonométriques évoquées dans la phrase et liées par la règle de trois figurent dans les colonnes « partie du milieu » et « extrêmes conjoints » du tableau. Le rayon est le premier terme de la proportion et le sinus de la partie médiane, écrit dans la première colonne est le quatrième terme (4) de la proportion ; les deux autres termes (2) et (3) sont les extrêmes conjoints.

Ceci se traduit par les formules algébriques suivantes :

1) $\dfrac{R}{\tan \widehat{BC}} = \dfrac{\cot \widehat{BAC}}{\sin \widehat{AB}}$ ....correspond à la formule contemporaine $\tan a = \sin b \tan \hat{A}$

2) $\dfrac{R}{\cot \widehat{AC}} = \dfrac{\tan \widehat{AB}}{\cos \widehat{BAC}}$ ....correspond à la formule $\tan c = \cos \hat{A} \tan h$ (h étant l'hypoténuse du triangle sphérique)

3) $\dfrac{R}{\cot \widehat{BAC}} = \dfrac{\cot \widehat{ACB}}{\cos \widehat{AC}}$ ....correspond à la formule $\cos h = \cot \hat{A} \cot \hat{C}$

4) $\dfrac{R}{\cot \widehat{AC}} = \dfrac{\tan \widehat{BC}}{\cos \widehat{ACB}}$ ....correspond à la formule $\tan a = \cos \hat{C} \tan h$

5) $\dfrac{R}{\tan \widehat{AB}} = \dfrac{\cot \widehat{ACB}}{\sin \widehat{BC}}$ ....correspond à la formule $\tan c = \sin a \tan \hat{C}$

Les cinq autres formules liant partie médiane et parties extrêmes disjointes se traduisent de la même façon par les formules algébriques suivantes

1) $\dfrac{R}{\sin \widehat{ACB}} = \dfrac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{AB}}$ ....correspond à la formule $\sin c = \sin \hat{C} \sin\ h$

2) $\dfrac{R}{\cos \widehat{BC}} = \dfrac{\sin \widehat{ACB}}{\cos \widehat{BAC}}$ ....correspond à la formule $\cos \hat{A} = \sin \hat{C} \cos a$

3) $\dfrac{R}{\cos \widehat{BC}} = \dfrac{\cos \widehat{AB}}{\cos \widehat{AC}}$ ....correspond à la formule $\cos h = \cos a \cos b$

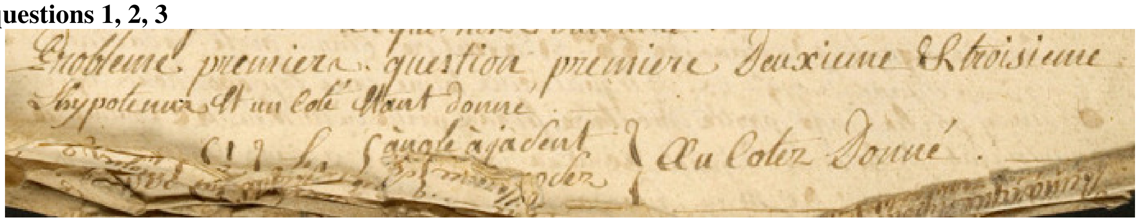
4) $\dfrac{R}{\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{\cos \widehat{AB}}{\cos \widehat{ACB}}$ ....correspond à la formule $\cos \hat{C} = \cos \hat{A} \cos c$

5) $\dfrac{R}{\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{BC}}$ ....correspond à la formule $\sin a = \sin h\ \sin \hat{A}$

Cette proposition permet de résoudre les triangles sphériques rectangles ; dès lors que l'on connaît deux des cinq parties, on peut calculer les trois autres. Pour trouver une partie inconnue, on peut être amené à réécrire la règle à utiliser en faisant en sorte que la partie inconnue soit toujours le quatrième terme de la proportion. C'est ce que veut dire Denoville quand il écrit
Remarque, quand la partie du milieu est à être trouvée le rayon est le premier terme de la proposition comme ci-devant, mais si chacun des extrêmes est requis, un extrême peut être le premier terme. La proposition est alors reformulée ainsi : *Comme la tangente de l'extrême donné est au rayon, ainsi le sinus de la partie du milieu est à la tangente de l'extrême requis.*

Suivent des exemples de résolution réunis en six problèmes englobant les 16 cas de résolution évoqués au début.

Problème 1 questions 1, 2, 3


Probleme premiere question premiere Deuxieme et troisieme
hypotenuse et un coté étant donné
(1) Le angle ajacent Au Coté donné

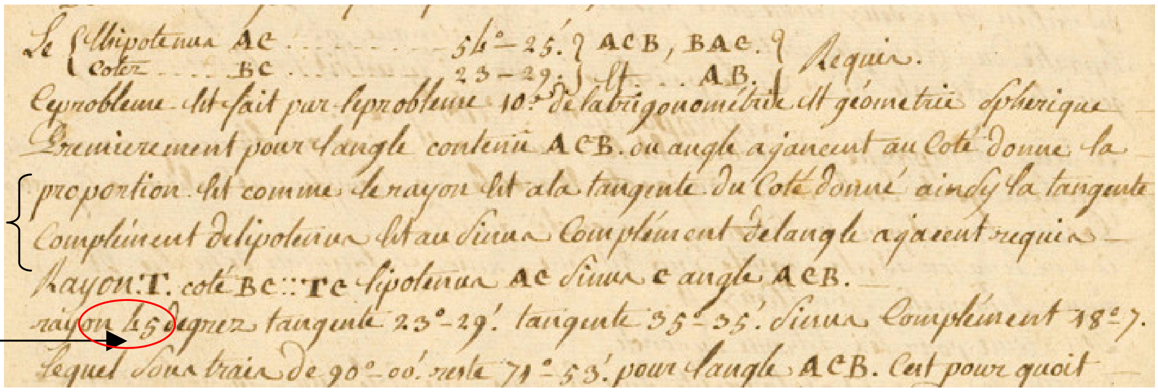
On suppose connus l'hypoténuse $\widehat{AC}$ et un côté de l'angle droit $\widehat{BC}$; on calcule les deux angles et le deuxième côté.
Examinons la résolution de Denoville.

La construction du triangle a fait l'objet du problème 10

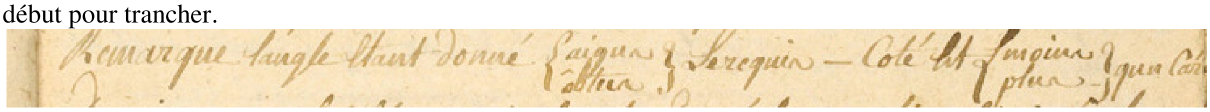
Énoncé de la règle

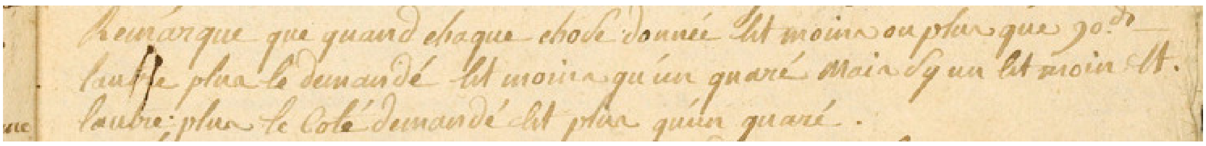
Les 4 termes de la proportion sont écrits en ligne

Il faut lire tan(45°) qui correspond au rayon


Le { Hipotenuse AC ..... 56°-25. } ACB, BAC } Requis.
Coté ..... BC ..... 23-29. } et ... AB.
Ce probleme est fait par le probleme 10e de la trigonometrie et geometrie spherique
Premierement pour l'angle contenu ACB ou angle ajacent au Coté donné la
proportion est comme le rayon est a la tangente du Coté donné ainsy la tangente
Compliment de l'hipotenuse est au Sinus Compliment de l'angle ajacent requis
Rayon:T. coté BC::Tc hipotenuse AC Sinus c angle ACB.
raison 45 degrez tangente 23°-29'. tangente 35°-35'. Sinus Compliment 18°-7.
Lequel Sous trais de 90°-00'. reste 71°-53'. pour l'angle ACB. Cest pour quoi

Denoville donne directement la réponse sans expliquer comment il la calcule. Il utilise très certainement les logarithmes puis obtient la réponse grâce à des tables. Il procède de la même façon pour calculer l'autre angle et le côté $\widehat{AB}$.
Si deux réponses sont a priori possibles, l'une inférieure, l'autre supérieure à 90°, il utilise les règles sur la nature des angles et côtés donnés au début pour trancher.


Remarque l'angle étant donné { aigu / obtus } Le requis — Coté est { moins / plus } que un Coté


Remarque que quand chaque chose donnée est moins ou plus que 90°.
l'autre plus le demandé est moins qu'un quarré. Mais si un est moins et
l'autre plus le Coté demandé est plus qu'un quarré.

Problème 2 questions 4, 5, 6

On suppose connus l'hypoténuse $\widehat{AC}$ et un angle $\widehat{BAC}$; on calcule le côté opposé, le côté adjacent à l'angle donné et l'autre angle.

Problème 3 questions 7, 8, 9

On suppose connus un côté de l'angle droit $\widehat{AB}$ et son angle adjacent $\widehat{BAC}$; on calcule le côté opposé à l'angle, le deuxième angle, puis l'hypoténuse.

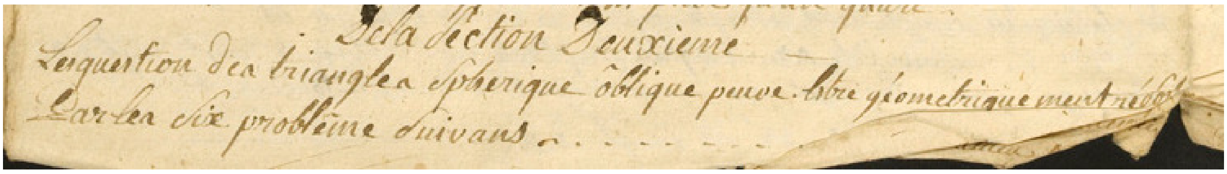
Problème 4 questions 10, 11, 12

On suppose connus un côté $\widehat{BC}$, et son angle opposé $\widehat{BAC}$; on calcule l'autre côté, l'autre angle, puis l'hypoténuse.

Problème 5 questions 13 et 14
On suppose connus les deux côtés de l'angle droit ; on demande les deux angles, et l'hypoténuse.

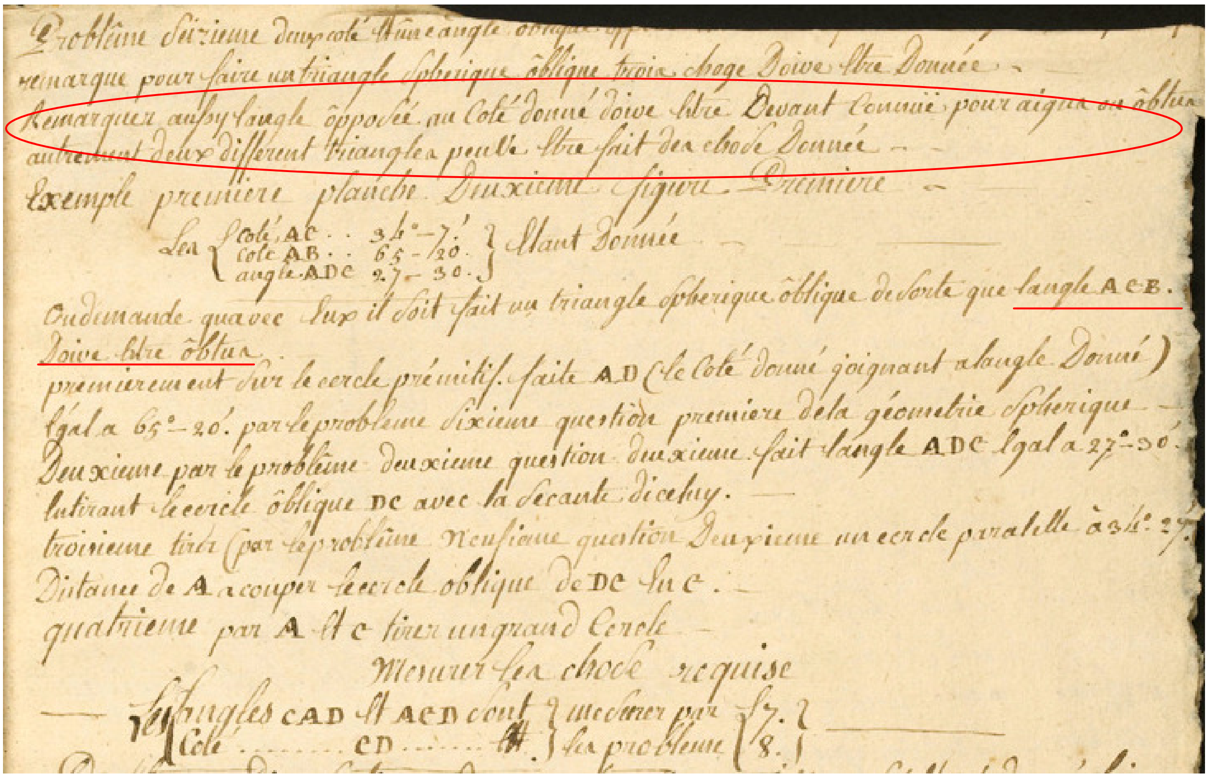
Problème 6 questions 15 et 16
On suppose connus les deux angles obliques ; on demande les deux côtés de l'angle droit, et l'hypoténuse.

Suite *de la section deuxième*

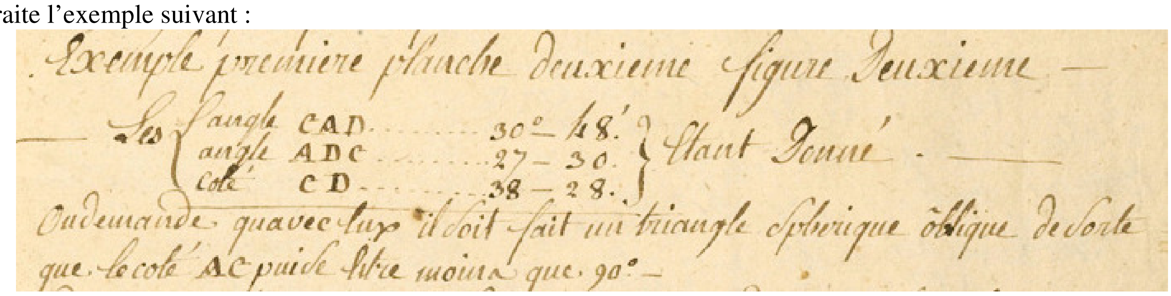

De la Section Deuxieme
Les question des triangles spherique oblique peuve être géométriquement résol[ues]
Par les six problème suivans. ...

Cette partie constitue une suite de la deuxième section consacrée aux triangles sphériques et plus particulièrement à la construction de triangles sphériques obliques. Il examine dans six problèmes la construction de triangles sphériques obliques. Comme dans le cas des triangles rectangles, la construction étant faite, il demande de mesurer les angles et côtés inconnus. Pour que la construction soit possible, trois des six éléments du triangle sphérique doivent être connus, et il se peut que deux triangles sphériques conviennent.

Problème 16 : On connaît deux côtés et un des angles obliques opposés à un de ces côtés ; construire le triangle sphérique.
Observons le texte de Denoville :


Probleme Sixieme deux coté et un angle oblique ...
remarque pour faire un triangle spherique oblique trois chose doive être donnée.
Remarquer aussy l'angle opposé au Coté donné doive être devant connue pour aigu ou obtus
autrement deux different triangles peult être fait des chose donnée.
Exemple premiere planche deuxieme figure premiere
Les { Coté AC .. 34°-7'. / Coté AB .. 65-20. / angle ADC 27-30. } Etant donnée
On demande qu'avec eux il soit fait un triangle spherique oblique de sorte que l'angle ACB.
doive être obtus
premierement sur le cercle primitif. faite AD (le Coté donné joignant a l'angle donné)
Egal a 65°-20'. par le probleme sixieme question premiere de la géométrie spherique
Deuxieme par le probleme deuxieme question deuxieme fait l'angle ADC Egal a 27°-30'.
en tirant le cercle oblique DC avec la secante d'icelluy.
troisieme tirer (par le probleme neufieme question deuxieme un cercle paralelle à 34°-7'
Distance de A a couper le cercle oblique de DC en C.
quatrieme par A et C tirer un grand Cercle
Mesurer les chose requise
Les angles CAD et ACD sont } mesurer par { 7.
Coté ... CD ... et } les probleme { 8.

Problème 17 : *Deux angles et un côté opposé étant donnés, faire un triangle sphérique*
Denoville traite l'exemple suivant :


Exemple premiere planche deuxieme figure deuxieme
Les { angle CAD .... 30°-48'. / angle ADC .... 27-30. / Coté CD .... 38-28. } Etant donné.
On demande qu'avec eux il soit fait un triangle spherique oblique de sorte
que le coté AC puisse être moins que 90°.

Problème 18 : *Deux côtés et un angle entre eux étant donnés, faire un triangle sphérique oblique.*

Problème 19 : *Deux angles et un côté entre eux étant donnés faire un triangle sphérique oblique.*

Problème 20 : *Trois côtés étant donnés faire un triangle sphérique oblique.*

Problème 21 : *Trois angles étant donnés faire un triangle sphérique oblique.*

Section cinquième : Les quatre axiomes suivants par lesquels les douze questions suivantes des triangles sphériques obliques sont résolues

Denoville énonce quatre axiomes permettant de résoudre les triangles sphériques obliques. Comme pour les triangles rectangles, ces propriétés sont énoncées mais non démontrées, d'où sans doute le nom d'axiomes. C'est la démarche anglo-saxonne que l'on trouve chez Seller. Ces axiomes expriment une fois de plus des règles de proportion, et conduisent à des formules multiplicatives permettant l'usage des logarithmes . La formulation en mots est lourde, et la présentation n'aide guère...

***Axiome premier** : En tous les triangles sphériques les sinus des côtés sont en* proportion *directe des sinus de leurs angles opposés.*
Denoville écrit *proposition* au lieu de proportion.

On aura reconnu la célèbre loi des sinus dans les triangles sphériques qui s'écrit algébriquement de nos jours $\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a}=\frac{\sin\widehat{B}}{\sin b}=\frac{\sin\widehat{C}}{\sin c}$, avec les notation habituelles qui seront reprises dans la suite.

Puis il précise la loi qu'il vient d'énoncer
Premièrement : Comme le sinus d'un côté est au sinus de son angle opposé, ainsi le sinus de son autre côté est au sinus de son angle opposé.
Deuxièmement : Comme le sinus d'un angle est au sinus de son côté opposé, ainsi le sinus de son autre angle est au sinus de son côté opposé.
Pour nous la deuxième phrase semble redondante, et exprimer la même chose que la première, mais pour Denoville dans chacune des deux phrases la quatrième proportionnelle, l'inconnue, diffère : c'est un angle dans le premier cas et un côté dans le second.

***Axiome deuxième** : Premièrement : Comme le sinus de la moitié de la somme des deux côtés contenant un angle est au sinus de la moitié de leur différence, ainsi la tangente-complément du demi-angle* contenu *est à la tangente de la demi-différence des deux autres angles.*
Algébriquement cette formule est la suivante

$$\frac{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)}=\frac{\cot\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)} \text{ équivalente à : } \tan\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)}$$

Deuxièmement : Comme le sinus-complément de la moitié de la somme des deux côtés contenant un angle est au sinus-complément de la moitié de leur différence, ainsi la tangente-complément du demi-angle contenu est à la tangente de la demi-somme des deux autres angles.
Algébriquement cette formule est la suivante:

$$\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)}=\frac{\cot\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)} \text{ équivalente à : } \tan\left(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}\frac{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}$$

Ces formules sont connues sous le nom de formule de Neper. Elles permettent de connaître la tangente de la demi-somme et de la demi-différence de deux angles, connaissant les côtés opposés à ces angles et le troisième angle.

***Axiome troisième** : Premièrement : Comme le sinus d'une demi-somme des deux angles est au sinus d'une demie de leur différence, ainsi la tangente de la moitié du côté interjacent est à la tangente d'une* [moitié] *de la différence des deux autres côtés.*

Deuxièmement : Comme le sinus-complément de la demi-somme des deux angles est au sinus-complément de leur demi-différence, ainsi la tangente du demi-côté interjacent est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés.

Algébriquement on obtient les formules suivantes : 1) $\frac{\sin\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{c}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ et 2) $\frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{c}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}$.

Elles permettent comme ci-dessus de connaître la tangente de la demi-somme et de la demi-différence de deux côtés, connaissant les angles opposés à ces côtés et le troisième côté.

Axiome quatrième : *Comme le rectangle des sinus des deux côtés contenant, est au carré du rayon, ainsi le rectangle des sinus de la demi-somme des trois côtés et de la différence du côté opposé, est au carré du sinus-complément du demi-angle contenu cherché.*

Ce qui se traduit par la formule suivante :

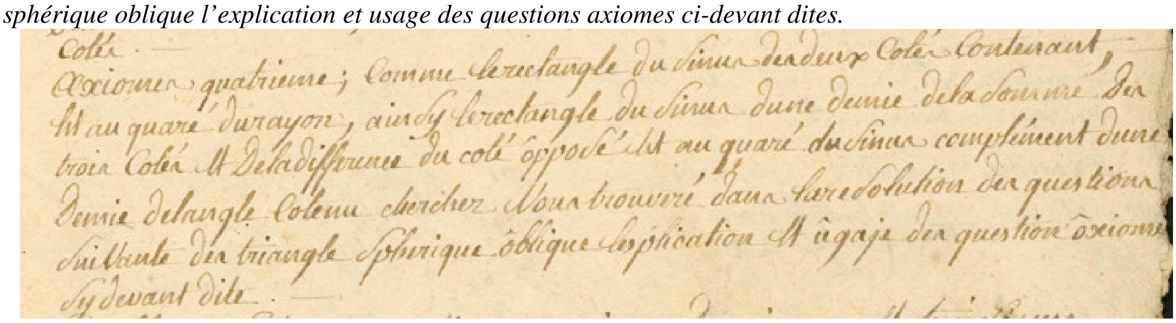
$$\frac{\sin b \sin c}{R^2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}$$

où p désigne le demi-périmètre du triangle, équivalente à la formule moderne suivante (avec $R = 1$)

$$\cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c} = \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\sin b \sin c}$$

, formule qui se déduit facilement de la formule des cosinus.

À la suite de ce dernier axiome, et sans aucune ponctuation Denoville écrit : *Vous trouverez dans la résolution des questions suivantes du triangle sphérique oblique l'explication et usage des questions axiomes ci-devant dites.*

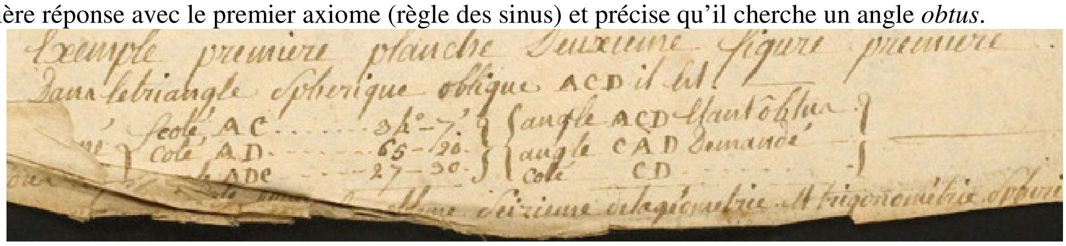

Coté
Axiome quatrieme ; Comme le rectangle du sinus des deux Coté Contenant,
Est au quaré du rayon, ainsy le rectangle du sinus d'une demie de la somme des
trois Coté Et de la difference du coté opposé Est au quaré du sinus complément d'une
demie de l'angle Contenu chercher Vous trouveré dans la resolution des questions
suivante des triangle spherique oblique l'explication Et usage des question axiome
cydevant dite.

Denoville examine sept problèmes de résolution de triangles sphériques obliques. Les exemples qu'il traite ont été construits dans la partie précédente, et rappelons que Denoville terminait chaque construction en demandant de mesurer les trois éléments du triangle non connus. Ici il va calculer les éléments manquants grâce aux axiomes. On retrouve les mêmes données numériques à plusieurs reprises.

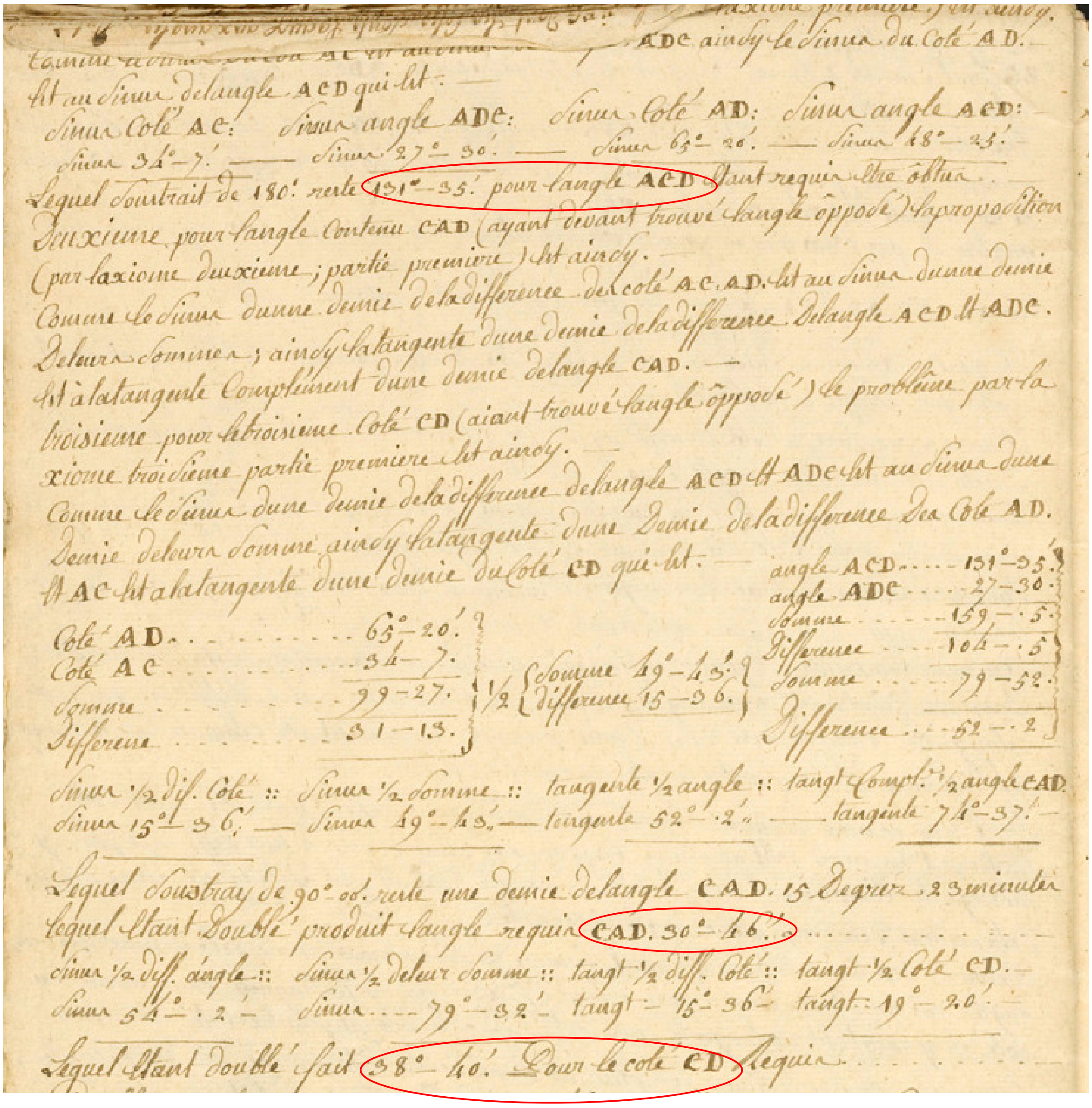
Problème 7 questions1, 2 et 3 : *Deux côtés et* un *angle opposé* [à un de ces côtés] *étant donnés, trouver*
Premièrement l'angle opposé à l'autre côté
Deuxièmement l'angle contenu entre eux
Troisièmement l'autre côté.

Il suppose que dans le triangle ACD, on connaît $\widehat{AC}$ = 34°7' ; $\widehat{AD}$ = 65°20' ; $\widehat{ADC}$ = 27°30'.

Il trouve la première réponse avec le premier axiome (règle des sinus) et précise qu'il cherche un angle *obtus*.


Exemple premiere planche Deuxieme figure premiere
Dans le triangle spherique oblique ACD il Est
Coté AC ... 34°-7' | angle ACD Etant obtus
Coté AD ... 65-20 | angle CAD demandé
ADC ... 27-30 | Coté CD

La deuxième question se résout avec l'axiome 2, première partie et la troisième question requiert l'axiome 3 première partie. Voyons la réponse complète de Denoville :


... ADC ainsy le sinus du coté AD.
est au sinus de l'angle ACD qui est.
Sinus coté AC: sinus angle ADC: sinus coté AD: sinus angle ACD:
sinus 34°-7'. — sinus 27°-30'. — sinus 65°-20'. — sinus 48°-25'.
Lequel soustrait de 180°. reste 131°-35'. pour l'angle ACD etant requis estre obtus.
Deuxieme pour l'angle contenu CAD (ayant devant trouvé l'angle opposé) la proposition
(par l'axiome deuxieme; partie premiere) est ainsy.
Comme le sinus d'une demie de la difference des coté AC.AD. est au sinus d'une demie
de leurs sommes; ainsy la tangente d'une demie de la difference de l'angle ACD et ADC.
est à la tangente complement d'une demie de l'angle CAD.
troisieme pour le troisieme coté CD (aiant trouvé l'angle opposé) le probleme par la[x]
xiome troisieme partie premiere est ainsy.
Comme le sinus d'une demie de la difference de l'angle ACD et ADC est au sinus d'une
demie de leurs sommes ainsy la tangente d'une demie de la difference des coté AD.
et AC est a la tangente d'une demie du coté CD qui est.

Coté AD	65°-20'		angle ACD	131-35
Coté AC	34-7'		angle ADC	27-30
somme	99-27'	1/2 somme 49-43'	somme	159-5
difference	31-13'	1/2 difference 15-36'	difference	104-5
			somme	79-32
			difference	52-2

Sinus 1/2 dif. coté :: sinus 1/2 somme :: tangente 1/2 angle :: tangt compl. 1/2 angle CAD.
sinus 15°-36'. — sinus 49°-43'. — tangente 52°-2'. — tangente 74°-37'.
Lequel soustray de 90°-00'. reste une demie de l'angle CAD. 15 degrez 23 minutes
lequel etant doublé produit l'angle requis CAD. 30°-46'.
sinus 1/2 diff. angle :: sinus 1/2 de leur somme :: tangt 1/2 diff. coté :: tangt 1/2 coté CD.
sinus 52°-2' — sinus 79°-32' — tangt 15-36 — tangt 19°-20'.
Lequel etant doublé fait 38°-40'. pour le coté CD requis.

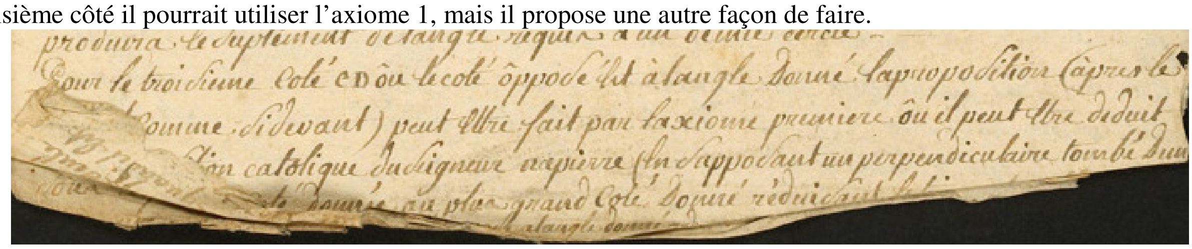
Problème 8 questions 4, 5 et 6 : *Deux angles et un côté opposé étant donnés, trouver*
Premièrement le côté opposé à l'autre angle
Deuxièmement le côté interjacent entre eux
Troisièmement le troisième angle.

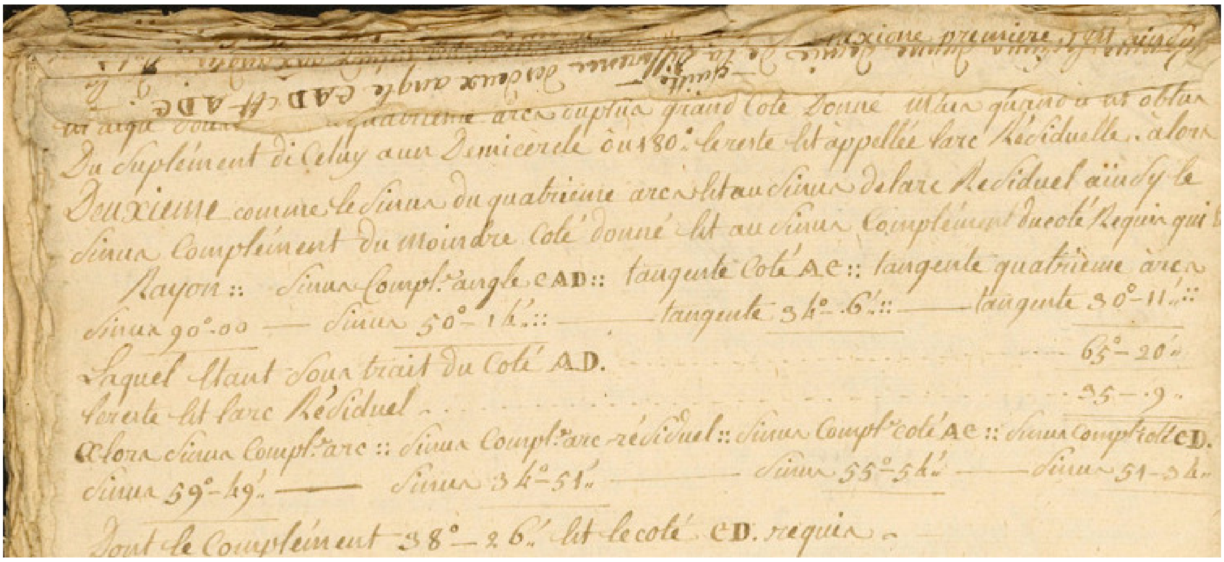
Il suppose que dans le triangle *ACD*, on connaît $\widehat{CAD} = 30°48'$; $\widehat{ADC} = 27°30'$; $\widehat{CD} = 38°28'$.
Il utilise l'axiome 1 pour trouver $\widehat{AC}$, l'axiome 3 pour trouver $\widehat{AD}$, l'axiome 2 pour trouver $\widehat{ACD}$ qu'il suppose obtus.

Il explique alors que les six questions examinées dans ces deux problèmes sont *douteuses*, car elles nécessitent, pour assurer l'unicité de la solution de connaître la nature de l'élément inconnu.

Problème 9 questions 7 et 8 : *Deux côtés et un angle* [contenu entre ces deux côtés] *étant donnés, trouver*
Premièrement chacun des autres angles
Deuxièmement le troisième côté opposé à l'angle donné.

Il suppose que dans le triangle *ACD*, on connaît $\widehat{AC} = 34°6'$; $\widehat{AD} = 65°20'$; $\widehat{CAD} = 30°46'$.
Il utilise l'axiome 2 pour trouver les deux angles. Il calcule leur demi somme et leur demi-différence, et obtient par une addition puis une soustraction de ces deux quantités chaque angle.
Pour le troisième côté il pourrait utiliser l'axiome 1, mais il propose une autre façon de faire.


produira le supplement de l'angle requis à un demie cercle.
Pour le troisieme coté CD ou le coté opposé est à l'angle donné la proposition (apres le[s]
... comme cidevant) peut estre fait par l'axiome premiere ou il peut estre deduit
... son catholique du signeur Napierre (en supposant un perpendiculaire tombé d'un
... donné au plus grand coté donné reduisant ...
... l'angle donné ...


... quatrieme arc ... grand Coté donné mais quand il est obtus
du supplement de celuy aux demicercle ou 180°. le reste est appellée larc Residuelle. alors
Deuxieme comme le sinus du quatrieme arc est au sinus de larc Residuel ainsy le
sinus Complement du Moindre Coté donné est au sinus Complement du coté Requis qui
Rayon :: sinus Compl. angle CAD :: tangente Coté AC :: tangente quatrieme arc
sinus 90°-00 — sinus 50°-14' :: — tangente 34°-6' :: — tangente 30°-11' ::
Lequel étant soustrait du Coté AD. — 65°-20'
le reste est larc Residuel — 35-9
alors sinus Compl. arc :: sinus Compl. arc residuel :: sinus Compl. coté AC :: sinus Compl. coté CD.
sinus 59°-49' — sinus 54°-51' — sinus 55°-54' — sinus 51-34
dont le Complement 38°-26' est le coté CD. requis.

J’ai un peu du mal à comprendre...Il semble que Denoville utilise un arc de cercle abaissé de *C* et perpendiculaire au côté *AD*, et qu’il travaille dans les triangles sphériques rectangles ainsi définis. Je ne vois pas très bien ce qu’il entend par *arc résiduel*.

Problème 10 questions 9 et 10 : *Deux angles et un côté entre eux étant donnés, trouver*
Premièrement chacun des autres côtés,
Deuxièmement l’angle opposé au côté donné.

Il suppose que dans le triangle *ACD*, on connaît $\widehat{ACD} = 131°34'$; $\widehat{ADC} = 27°30'$; $\widehat{CD} = 38°28'$.

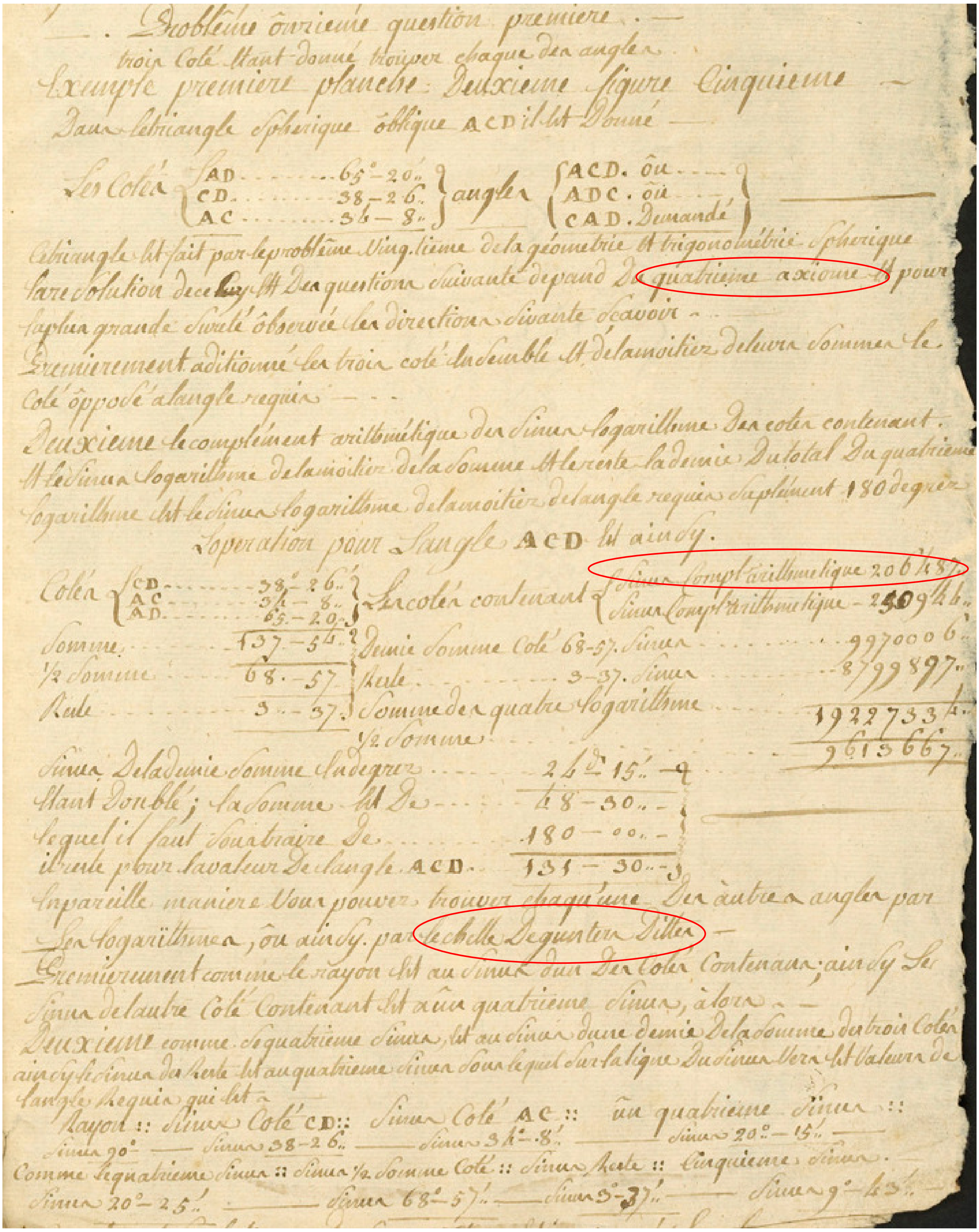
Pour les côtés il utilise l’axiome 3, calculant leur demi-somme et leur demi-différence. Pour le troisième angle, il propose outre l’utilisation possible de l’axiome 1, une solution du même type que dans l’exemple précédent.

Problème 11 questions 11 : *Les trois côtés étant donnés, donner les trois angles.*

Il suppose que dans le triangle *ACD*, on connaît $\widehat{AC} = 34°8'$; $\widehat{AD} = 65°20'$; $\widehat{CD} = 38°é6'$.

Il utilise l’axiome 4, et pour la première fois on voit apparaître les valeurs des logarithmes qu’il utilise . Dans les exemples précédents les réponses étaient données directement après l’énoncé de la règle de proportionnalité utilisée.
Il reprend littéralement le texte de Seller qui écrit dans la résolution de son cas XI
« La résolution de ce cas dépend du cinquième axiome, et pour une opération rapide, prenez ce bref conseil. Ajouter les trois côtés ensemble, et de la demi-somme soustraire le côté opposé de l’angle demandé. Ensuite au compléments arithmétiques des logarithmes des sinus des côtés contenants, ajouter le logarithme du sinus de la demi-somme et du reste ... ».
Denoville détaille le calcul de l’angle $\widehat{ACD}$ et on retrouve la même présentation (en moins soignée) que dans la partie consacrée au calcul de trigonométrie sphérique du manuscrit. Il doit évaluer par les logarithmes $\cos^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$ qui est égal, par le quatrième axiome à $\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin d} \times R^2$ où *a* et *d* sont les côtés contenant l’angle $\widehat{C}$ cherché, *c* est le côté opposé à $\widehat{C}$ et *p* le demi-périmètre. Il calcule le double du logarithme de $\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$ en additionnant les logarithmes de sin *p* et de $\sin(p-c)$ et les *compléments arithmétiques des sinus logarithmes des côtés contenant*, autrement dit les différences entre le logarithme du rayon et celui du logarithme du sinus du côté. Quel type de logarithme utilise-t-il ? Vues les valeurs numériques du document (nombre entier avec 7 chiffres) on peut penser que le logarithme du rayon est 10 000 000 (il était de 1 000 000 dans le chapitre consacré au sinus logarithme du manuscrit) et qu’ici ce que Denoville nomme sinus de l’angle *x* est en fait $10^6 \log(10^{10} \sin x)$; si bien que le complément arithmétique du sinus logarithme de 38°26’ est $10^7 - 10^6 \log\left(10^{10} \sin(38°26')\right) \approx 206487$.
Il propose une deuxième façon de faire, qui n’utilise pas l’axiome 4 mais se réfère à la mystérieuse *échelle Degunter Ditter* (?)

Observons la résolution de Denoville :



. Probleme ouzieme question premiere .—
trois Coté Etant donné trouver chaque des angles
Exemple premiere planche Deuxieme figure Cinquieme —
Dans le triangle spherique oblique ACD il Est Donné —

Les Cotés { AD .... 65°–20.. ; CD .... 38–26.. ; AC .... 34–8.. } angles { ACD. ou ; ADC. ou ; CAD. Demandé }

Ce triangle Est fait par le probleme Vingtieme de la géometrie Et trigonometrie spherique
sa resolution de ce sujet Des questions suivante depand du quatrieme axiome Et pour
la plus grande surté observée les direction suivante sçavoir —
Premierement aditionné les trois coté Ensemble Et de la moitiez de leurs sommes le
Coté opposé a l'angle requis — —
Deuxieme le complément arithmetique des sinus logarithme des cotés contenant.
Et le sinus logarithme de la moitiez de la somme Et le reste la demie du total du quatrieme
logarithme Est le sinus logarithme de la moitiez de l'angle requis suplement 180 degrés

L'operation pour l'angle ACD Est ainsy.

Cotés { CD ...... 38°–26.. ; AC ...... 34–8.. ; AD ...... 65–20.. } les cotés contenant { sinus compl arithmetique 206487 ; sinus compl arithmetique – 250944 }
Somme .... 137–54.. Demie somme Coté 68-57. sinus 9970006
1/2 somme .... 68.–57 Reste .... 3-37. sinus 8799897
Reste .... 3.–37. Somme des quatre logarithme 19227334
1/2 somme 9613667

sinus de la demie somme En degrés .... 24°–15..–4
Etant doublé ; la somme Est De .... 48–30..
Lequel il faut soustraire De .... 180–00..
il reste pour la valeur de l'angle ACD .... 131–30..

En pareille maniere vous pouvez trouver chaqu'une des autres angles par
ses logarithmes, ou ainsy par l'echelle De gunter Dites —
Premierement comme le rayon Est au sinus d'un des cotés contenans ; ainsy les
sinus de l'autre coté contenant Est a un quatrieme sinus, alors — —
Deuxieme comme ce quatrieme sinus Est au sinus d'une demie de la somme des trois cotés
ainsy le sinus du reste Est au quatrieme sinus sous lequel sur la ligne du sinus vers Est valeur de
l'angle requis qui Est —
Rayon :: sinus Coté CD :: sinus Coté AC :: un quatrieme sinus ::
sinus 90° — sinus 38–26.. — sinus 34–8' — sinus 20°–15'.. —
Comme le quatrieme sinus :: sinus 1/2 somme Coté :: sinus Reste :: Cinquieme sinus.
sinus 20°–25' — sinus 68°–57' — sinus 3–37' — sinus 9°–43'

Problème 12 question 12 : *Les trois angles étant donnés, trouver les trois côtés.*

Il suppose que dans le triangle *ACD*, on connaît $\widehat{ACD} = 30°47'$; $\widehat{ADC} = 27°30'$; $\widehat{CAD} = 131°34'$.

Denoville explique que ce problème se traite comme le précédent, les angles étant remplacés par les supplémentaires des côtés et les côtés par les supplémentaires des angles. Ce qui revient à résoudre le triangle polaire (mais cet adjectif n'est jamais cité par Denoville) dont on connaît les trois côtés, grâce à l'axiome 4, puis à en déduire les trois côtés du triangle initial qui sont les supplémentaires des angles du triangle polaire associé.
Il propose encore une deuxième solution...

Les angles { ACD . . . 30° – 47′. / ADC . . . . 27 – 30. / CAD . . . 121 – 34. } Les Cotés { CD . . . . ou . . / AC . . . . ou . . / AD Demandé }

Ce triangle est fait par le problème vingtième de la géométrie et trigonométrie sphérique. Cette question est pareillement faite par la direction de la question onzième, les angles étant pasées les Cotés et les cotés les angles, et alors prenez le supplément du plus grand angle donné à 180 degrez.

Pour le Coté **AD** La proposition est ainsy.

Supplément de l'angle	CAD. 48° – 26′.	angle àgacent	Sinus Compl.t arithmetique		0.125992.
			Sinus Compl.t arithmetique		0335594.
angle . . .	ADC 27 – 30. / ACD 30 – 47	Demie Somme	53° – 21.	Sinus	9904335.
Somme . . .	106 – 43.	Reste	22 – 34.	Sinus	9584058.
Demie Somme . . .	53 – 21. ½	Somme des quatre	logarithme . . .		19929979.
Reste . . .	22 – 34.		Demie Somme . . .		9974989 ½
		Double 70° – 44′. / 70 – 44.			
la Somme est De . . .		141 – 28.			
lequel il faut Soustraire De . . .		180 – 00.			
le reste est le coté **AD** . . .		38 – 32.	Demandée ou requis		

De pareille manière vous pouvez trouver les autres Cotés par le logarithme ou ainsy par l'echelle de quarteres.