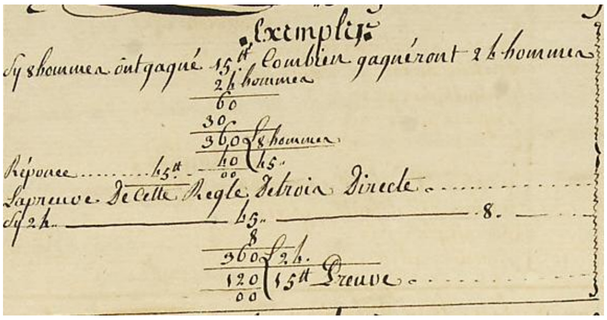
Voici le contenu des parties 3 et 4 de l'arithmétique.
La proportionnalité sous toutes ses formes est étudiée .*Troisième partie de l'arithmétique*

Règle de trois simple et directe.

Règle de trois car il s'agit de problèmes mettant en jeu trois nombres. Voici la première des trois questions que Denoville résout. *Si 8 hommes ont gagné 15 livres, combien gagneront 24 hommes ?* Cette situation est dite directe car le gain est proportionnel au nombre d'hommes. Au XVIIIe siècle, le calcul des proportions est à la base du traitement de ce problème. D'ailleurs, Denoville n'aborde le calcul de fractions que plus tard (en cinquième partie). Le nombre cherché h est le quatrième nombre de la proportion notée : 8 : 15 : : 24 : h, il est alors naturel pour Denoville, de faire le produit des « moyens » c'est-à-dire 15 × 24 et de diviser par l'extrême 8 et ceci sans la moindre explication. Dans tous les exemples, les nombres du texte sont présentés dans un ordre tel que systématiquement la solution demande de faire le produit des deux derniers et de diviser par le premier. Aucune phrase donnant un sens à l'opération n'accompagne la procédure.



Si 8 hommes ont gagné 15 livres, combien gagneront 24 hommes

24
60
30 .
360 | 8
40 | 45
00 |

Réponse ……………………….45 livres

Preuve de cette règle de trois directe………………….

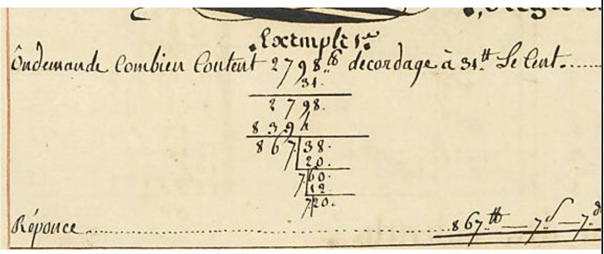
Si 24 hommes ont gagné 45 Livres, combien gagneront 8 hommes

8
360 | 24
120 | 15 # Preuve….
00 |

Pour ce premier exemple, il propose une preuve, elle consiste à proposer le problème à l'envers et de retrouver les données de départ.
Dans les trois paragraphes suivants, il fait des règles de trois particulières dont un des éléments vaut 100.

Règle du cent

Il s'agit de trouver le prix de quantités d'objets dont on connaît le prix pour une centaine d'entre eux.



Que coûtent	*2 798*	*unités de cordage à 31 livres le cen*
	× 31	
	27 98	
	839 4. .	
	867 | 38	86738 = 86700 + 38 livres
	. × 20	38 livres = 760 sols
	7 | 60. .	= 700 sols + 60 sols
	× 12.	60 sols = 720 deniers = 700 + 20 d
	7 | 20	En divisant par 100, on obtient :

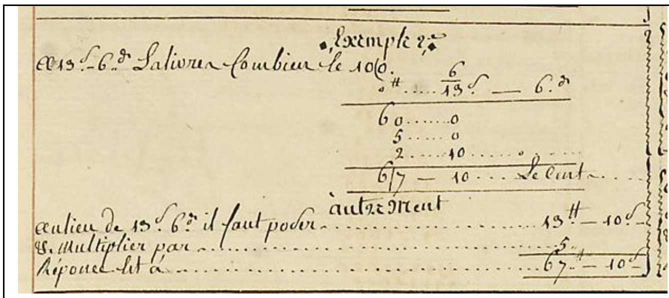
Réponse : 867 livres, 7 sols et 7 deniers

La façon de poser les opérations donne vite le résultat. On a négligé 20 centièmes de deniers, ce qui effectivement est très petit !
Cinq autres exemples sont proposés avec des prix souvent plus gros ou mélangeant livres et sols.

Par rapport à la pièce, trouver la valeur du 100.

Il s'agit de trouver la valeur de 100 objets dont on connaît la valeur unitaire.
Reportons le deuxième exemple pour lequel Denoville propose deux solutions. Pour la multiplication par livres et sols de la première il utilise la méthode de la « moitié » qu'il avait préconisée dans le paragraphe concerné.

	A 13 sols 6 deniers la livre, combien le 100 10 (0 × 0 # 6 sols …6 Car 6 est la petite



Exemple 2e.
A 13 s. 6 d. la livre combien le 100.
6
... 13 s — 6 d.
60 0
5 0
2 10
67 — 10 ... le cent
autrement
au lieu de 13 s. 6 d. il faut poser .... 13 # — 10 s.
et multiplier par 5
Réponse est .... 67 — 10 s.

deniers	moitié de 13
60 # 0 sols	
5 # 0 sols	Car 1 est impair
2 # 10 sols pour 6 deniers	
67 livres et 10 sols le cent	

Autrement (pour multiplier par 100, on multiplie par 20 puis par 5)

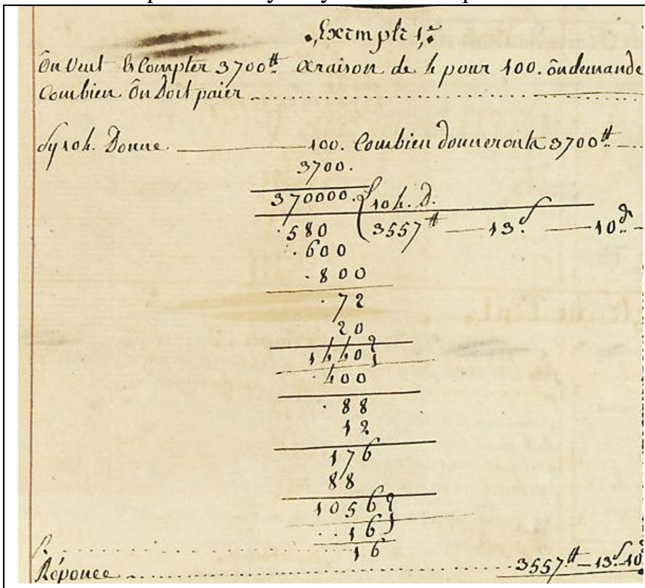
13 S et 6 deniers donnent	13 livres et 10 sols
	× 5
	67 # et 10 sols

Par rapport au cent, trouver la valeur de la pièce.

Le problème est inverse du précédent et dans le premier exemple, il veut le prix d'une orange sachant qu'une centaine vaut 17 sols. Il commence par exprimer les 17 sols en deniers et ensuite il divise par 100.

Règle du compte

Le mot compte est ici synonyme d'escompte.



Exemple 1er.
On veut escompter 3700 # à raison de 4 pour 100. On demande combien on doit payer ....
Si 104 donne ———— 100. Combien donneront 3700 # ...
3700.
370000 (104 l. d.
580 (3557 # — 13 s. — 10 d.
Réponse .... 3557 # — 13 s. 10

A l'origine, il s'agissait d'une somme d'argent qu'on rendait par anticipation. Par exemple nous devons donner à la fin de l'année 3700 livres mais voulant nous acquitter tout de suite, nous donnons moins. Combien alors devons nous donner ? Il est précisé que le taux de l'escompte est de 4%. Cela veut dire que cette somme par anticipation placée à 4% doit donner en fin d'année la somme prévue c'est-à-dire 3700 livres. Cela explique que les 4% ne portent pas sur 3700 mais sur le montant cherché. Cela justifie la façon dont la règle de trois est appliquée par Denoville.

.

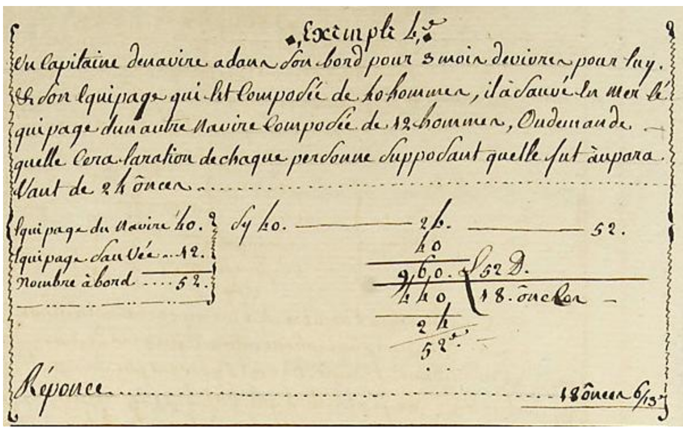
Ensuite il évoque *la règle de la tare* en faisant remarquer que *la tare ne diffère en rien de l'escompte*.
En effet, cela concerne un objet ayant subi une dégradation ou bien d'une marchandise dont le prix est au poids alors que son emballage représente une partie de ce poids. Il faut donc opérer une diminution mais attention, là encore le pourcentage annoncé concerne le prix amoindri et non le prix d'origine comme dans le cas de l'escompte.

La règle de trois simple indirecte ou inverse

Dans les situations relevant de cette règle, il y a des quantités inversement proportionnelles.

Voici le quatrième énoncé qui concerne un capitaine de navire qui doit définir les rations de ses hommes.

Celui ci, au cours d'un voyage, sauve des personnes et cherche à savoir ce que devient la ration individuelle après l'augmentation des bouches à nourrir. Cette ration individuelle est inversement proportionnelle au nombre de gens à

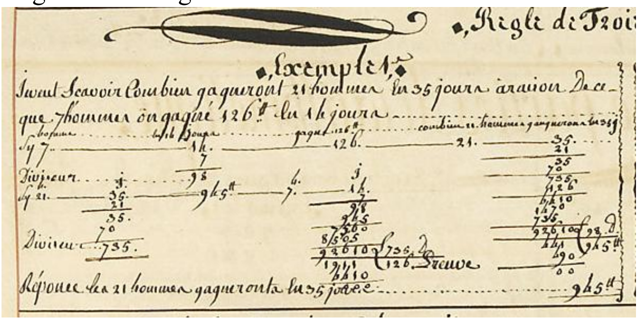


Exemple 4e.
Un capitaine de navire a dans son bord pour 3 mois de vivres pour luy et son équipage qui est composé de 40 hommes, il a sauvé en mer l'équipage d'un autre navire composé de 12 hommes, On demande quelle sera la ration de chaque personne supposant qu'elle fut auparavant de 24 onces ....
Équipage du navire 40. Si 40. ———— 24. ———— 52.
Équipage sauvé ... 12.
Nombre à bord ... 52.
960 (52 d.
440 (18 onces
Réponse .... 18 onces 6/13

alimenter. Le problème est plus compliqué que les autres car la précision de la durée du voyage (5 mois) est inutile et peut troubler l'élève, le nouvel effectif n'es pas directement donné mais nécessite une petite addition enfin l'ordre d'arrivée des nombres dans le texte est inhabituel, l'élève doit les réordonner. Il peut alors s'appuyer sur la phrase : « Si 40[1] hommes ont une 24 onces pour ration, combien sera la ration de 52 hommes ? ». La solution est alors de multiplier les deux premiers nombres et de diviser par le troisième.

. *Règle de trois double directe puis indirecte.*

Elle est double lorsque entrent en jeu deux règles de trois de même nature.
Dans l'exemple ci-dessous, le gain est à la fois proportionnel au nombre de jours et au nombre d'hommes, il s'agit donc de règles directes.



En fait, 21 hommes travaillant 21 jours correspondent à 21 × 35 ou 735 journées de travail de même 7 hommes travaillant 14 jours correspondent à 98 journées. Le problème peut être reformulé sous la forme : A combien rapportent 735 journées de travail, si 98 rapportent 126 livres et ceci relève d' une règle de trois directe.

Règle de trois composée.

Cette règle est composée de deux règles, l'une directe et l'autre indirecte explique notre auteur, un exemple concernant encore des quantités de journées de travail illustre le propos.

Règle de trois conjointe

Cette règle est ainsi nommée parce qu'elle conjoint plusieurs règles de trois directes dont le nombre peut être aussi grand que l'on veut : par exemple si 4 aunes de Paris font 7 aunes d'Anvers, 21 d'Anvers font 12 de Lyon, 5 de Lyon font 3 aunes de Montpellier, 5 de Montpellier 17 brasses[2] *de Florence, combien 25 aunes de Paris font-elles de brasses de Florence ?*
La variation d'une unité comme l'aune selon la région est donc le sujet de l'exemple.
Puisque 4 aunes de Paris valent 7 aunes d'Anvers, 25 de Paris valent : (7/4) × 25 aunes d'Anvers.
Puisque 21 aunes d'Anvers valent 12 aunes de Lyon, (7/4) × 25 aunes d'Anvers valent : (12/21) × (7/4) × 25aunes de Lyon.
Et ainsi de suite, par conséquent, 25 aunes de Paris valent : (17/5) × (3/5) × (12/21) × (7/4) soit 51 brasses de Florence.
Denoville propose pour sa part de faire le produit (2100) de tous les *antécédents*[3] puis le produit (4284) de tous les *conséquents* et d'appliquer alors une règle de trois simple. Cela conduit heureusement rapidement au même résultat.

---

[1] le texte dit qu'à bord du navire, il y a le capitaine et son équipage de 40 hommes ? Le nombre de personnes à nourrir devrait donc être évalué à 41 mais Denoville ne s'arrête pas à ce détail et prend 40.

[2] Dès l'antiquité grecque, la brasse correspond à la longueur de deux bras ouverts entre les poings fermés.
La brasse, est aussi une espèce d'aune ou de mesure de longueur, qui sert à mesurer les draps, toiles, rubans & autre, pareilles marchandises d'après l'encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers.

[3] Toutes données proposent une premier nombre l'antécédent et un deuxième nombre le conséquent. Par exemple 4 aunes de Paris font 7aunes d'Anvers, 4 est un antécédent et 7 est un conséquent

Quatrième partie de l'arithmétique

Règle de compagnie

Voyons tout de suite l'exemple.
Trois marchands se sont associés, le premier a mis 6426 livres, le second 3200 livres et le troisième 2550 livres. Ils ont gagné 4342 livres, savoir ce qui appartient à chacun à proportion de sa mise.
La résolution correspond à faire trois règles de trois, à savoir une par associé. Cela explique la phrase de Jean Baptiste *Cette règle est une règle de trois simple et directe réitérée autant de fois qu'il y a d'associés. Il écrit ensuite une solution présentée clairement en forme quasiment de tableau.*

Règle d'alliage (p. X)

Il y a deux sortes de règle d'alliage. La première est un mélange de plusieurs choses.
Par exemple un marchand de blé en a de trois sortes, à savoir du froment à 16 sols le boisseau, du méteil (c'est le mélange de froment et de seigle) *à 54 S et du seigle à 11 S pour voir combien vaudra le boisseau si on mêle autant l'un que de l'autre, il faut mettre les trois prix ensemble qui sont 16 – 14 et 11. L'addition donnera 41 Sols dont on prend le tiers cause qu'il y a trois sortes de blé et l'on aura 13 S 8 d pour la valeur du boisseau.*

$$\begin{array}{r} 16 \\ 14 \\ \underline{11} \\ \underline{41\ S} \end{array} \quad \underline{13\ S\text{……..}8\ \text{deniers, prix du boisseau}}$$

Si au lieu de mettre autant de l'un que de l'autre, il en mettait par exemple 24 boisseaux de celui à 16 sols, 20 de celui à 14 sols et 16 de celui à 11 S, il faudrait les multiplier par leur valeur à savoir les 24 par 16, les 20 par 14 et les 16 par 11 ; L'addition des trois produits donnera 840 sols que l'on divisera par 60, nombre des boisseaux, et il viendra 14 sols pour la valeur de chacun.

$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{16} \\ 144 \\ \underline{24.} \\ 384. \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{14} \\ 80 \\ \underline{20\ .} \\ 280. \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{11} \\ 16 \\ \underline{16\ \ .} \\ 176. \end{array}$

$$\begin{array}{r|l} 384 & \\ 280 & \\ \underline{176} & \\ 840 & \underline{60} \\ 240 & 14\quad Sols \\ 00 & \end{array} \qquad (24 + 20 + 6= 60)$$

Réponse, valeur de chacun : 14 sols.

La seconde règle d'alliage est un mélange de plusieurs choses de différentes valeurs. Pour savoir la quantité qu'il faut de chacun afin de la réduire à tel nombre ou prix que l'on veut. Celle-ci est plus difficile que la première et de tous les autres qui ont traité d'arithmétique, il ne se trouve aucun qui se soit bien expliqué sur cette seconde espèce d'alliage…..

Pour donc faire cette règle sûrement sans peiner, il faut séparer les valeurs de deux en deux et il n'importe pas lesquels on met les premiers ou les derniers pourvu qu'on les dispose en sorte qu'il y en ait toujours un qui excède le prix auquel on veut faire l'alliage et un autre qui doit être moindre que le prix par ce que par exemple on ne peut pas mêler de l'argent à 22 livres le marc (c'est une mesure de poids de l'époque valant une demi-livre) *avec d'autre à 24 livres pour en faire à 25 livres, ni de l'argent à 26 livres avec celui de 27 livres pour en faire à 25 livres, mais on peut bien mêler à 27 livres et à 19livres pouren faire qui revienne à 25 livres. Ayant donc séparé les nombres de deux en deux, on remarquera les différences qu'il y a de chaque premier et second nombres à celui de l'alliage, mettant à côté du second la différence du premier et à côté du premier la différence du second comme l'on verra dans l'exemple qui suit.*
Exemple 1
Un orfèvre a 8 lingots d'argent, à savoir à 18, 19, 21, 23, 26, 27, 28 et 29 livres le marc, il en veut faire un ouvrage pesant 174 ….marc à 25 livres le marc et pour cet effet, il désire savoir combien il en prendra de chaque lingot.

Premier	*18………………*	*1 Différence….*	*De………………*	*26…à…………..*	*25*
Second	*26*	*7 Dif…………*	*De………………*	*18…à…………..*	*25*
Premier	*19………………*	*2 Différence….*	*De………………*	*27…à…………..*	*25*
Second	*27*	*6 Dif…………*	*De………………*	*19…à…………..*	*25*
Premier	*21………………*	*3 Différence….*	*De………………*	*28…à…………..*	*25*
Second	*28*	*4 Dif…………*	*De………………*	*21…à…………..*	*25*
Premier	*23………………*	*4 Différence….*	*De………………*	*29…à…………..*	*25*
Second	*29*	*2 Dif…………*	*De………………*	*23…à…………..*	*25*
		29 marcs			

Chaque différence fat connaître combien il faut prendre de marc au prix qui est à côté, par exemple 1 montre qu'il en faut prendre 1 à 18 livres le marc, 7. montre qu'on en doit prendre 7 à 26 livres le marc etc.. ce qu'il se peut vérifier en les multipliant séparément par leur valeur, et divisant l'addition des produits par 29 car il viendra 25 livres ……
Mais parce que l'orfèvre a besoin de plus de 29 marcs puisqu'il lui en faut 174, l'on divisera par 29 et il viendra 6 par lequel nombre multipliant chacune des différences 1, 7, 2, 6, 3, 4, 4, 2, on trouvera que l'orfèvre doit prendre 6 marcs d'argent à 18 livres le marc.

174 | 29
00 | 6

6	marcs d'argent	à………………………18 livres le marc	108
42	……………….	à………………………26 livres le marc	1092
12	……………….	à………………………19 livres le marc	228
36	……………….	à………………………27 livres le marc	972
18	……………….	à………………………21 livres le marc	378
24	……………….	à………………………28 livres le marc	672
24	……………….	à………………………23 livres le marc	552
12	……………….	à………………………29 livres le marc	348
174			4350 | à 174
			870 | 25 livres
			000

6	36	24	
× 18	× 27	28	
108	252	192	12
42	72..	48..	29
× 26	972	672	108
252	18	24	24..
84 .	× 21	23	348
1092	18	72	
12	36..	48..	
× 19	378	552	
108			
12..			
228			

Explications de cette deuxième règle :

L'orfèvre, veut faire un alliage qui revienne à 25 sols le marc avec huit lingots dont la moitié de valeur inférieure à 25. Cet alliage contiendra x1, x2, x3, x4 marcs des lingots de valeur unitaire 18, 19, 21, 23 sols et y1, y2, y3, y4 marcs de valeurs unitaires 26, 27, 28, 29.
Le prix unitaire du mélange sera bien de 25 sols si :
$18x_1 + 19x_2 + 21x_3 + 23x_4 + 26y_1 + 27y_2 + 28y_3 + 29y_4 = 25\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$
soit : $(26 - 25)y_1 + (27 - 25)y_2 + (28 - 25)y_3 + (29 - 25)y_4 = (25 - 18)\,x_1 + (25 - 19)x_2 + (25 - 21)x_3 + (25 - 23)\,x_4$
soit : $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4$
Si chaque produit du 1[er] membre est égal à l'un des produits du second membre, les deux sommes seront égales.
Si $y_1 = 7x_1$, $2y_2 = 6x_2$ $3y_3 = 4x_3$ et $4y_4 = 2x_4$ alors les deux sommes seront égales comme le dit Denoville.
Cela serait également réalisé, avec une autre répartition des égalités de produits, par exemple si nous prenions $y_1 = 6x_2$ et $2y_2 + = 4x_3$ ….

En prenant : $y_1 = 7$ et $x_1 = 1$, nous avons $y_1 = 7x_1$; pour $y_2 = 6$ et $x_2 = 2$, nous avons $2y_2 = 6x_2$ puis pour $y_3 = 4$ et $x_3 = 3$, $3\,y_3 = 4x_3$ enfin pour $y_4 = 2$ et $x_4 = 4$, $4\,y_4 = 2x_4$
L'alliage est alors composé de 1 marc à 18 sols, 2 marcs à 19, 3 marcs à 21, 4 marcs à 23, 7 marcs à 26, 6 marcs à 27, 4 marcs à 28 et 2 marcs à 29 sols. Ce mélange pèse 29 marcs or il veut un poids de 174 marcs, c'est-à-dire 6 fois plus.
Denoville propose donc de faire un alliage de 6 marc à 18 sols, 12 marcs à 19, 18 marcs à 21, 24 marcs à 23, 42 marcs à 26, 36 marcs à 27, 24 marcs à 28 et 12 marcs à 29 sols.
Il revient à $6 \times 18 + 12 \times 19 + 18 \times 21 + 24 \times 23 + 42 \times 26 + 36 \times 27 + 24 \times 28 + 12 \times 29$ sols c'est-à-dire 4350 sols, Denoville divise par 174 et vérifie que le prix de revient unitaire est bien de 25 sols comme demandé.

Denoville envisage ensuite le cas où il doit faire un alliage à partir de lingots pour lesquels les prix ne se répartissent pas à égalité entre les valeurs inférieures et supérieures au prix de revient voulu. Il illustre ceci avec de nouveau 8 lingots dont il veut faire un alliage au coût unitaire de 24 livres mais deux ont un prix supérieur à 24 tandis que6 ont un prix inférieur à 24. La procédure choisie est adaptée de la précédente.

Exemple 2

Un orfèvre a huit sortes d'argent à savoir : 12 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 25 et 26 livres le marc. Il en veut faire qui lui revienne à 24 livres le marc. Combien faut-il qu'il prenne de chaque sorte ?

18………………	*2 Différence….*
26	*6 Dif…………*
19………………	*1 Différence….*
25	*5 Dif…………*
20………………	*0 Différence….*
21	*0 Dif…………*
22………………	*0 Dif…………*
23	*0 Dif…………*

Après avoir comme dessus séparé les nombres de deux en deux et pris la différence des quatre premiers, on remarquera que les quatre derniers ne peuvent pas être alliés ensemble, étant chacun de moindre valeur que 24 qui est le nombre auquel on veut faire alliage. C'est pourquoi il les faut allier avec un nombre de plus grande valeur par exemple 26 ou 25. . Il n'importe pas lequel, mais on suppose que ce soit 26. Ces quatre nombres lui donneront leurs différences qui sont 4 – 3 – 2 – 1, lesquelles avec 6 qu'il y avait auparavant font 16. Il faudra aussi que 26 donne la différence 2 à chacun de ces quatre nombres inférieurs comme ci-dessous.

18………………… … … .	*2 Différence….*	
26………………… … … .	*6 Dif…………*	*4 – 3 –2 – 1*
19………………… … …	*1 Différence….*	
25………………… … … .	*5 Dif…………*	
20………………… … …	*2 Différence….*	
21	*2 Dif…………*	
22………………… … … .	*2 Dif…………*	
23………………… … … .	*2 Dif…………*	

Nombre des différences 32

Toutes les différences font ensemble 32 marcs à 24 livres le marc en prenant 2 marcs d'argent à 18 livres, 16 de celui à 26 livres, 1 de celui à 19 … etc de sorte que si l'orfèvre en veut plus que 32 marcs il n'y a qu'à faire comme il y a été indiqué dans l'exemple précédent.
Si après avoir séparé les prix en deux, il en trouve un tout seul, il donnera la différence à quelqu'un de ceux auxquels il faut faire alliage et en échange, ce nombre lui donnera la sienne.

Avec les notations semblables aux explications de l'exemple précédent :
$18x_1 + 19x_2 + 20x_3 + 21x_4 + 22x_5 + 23\,x_6 + 25x_3 + 26y_4 = 24\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + y_1 + y_2)$
ou $(26 - 24)y_1 + (25 - 24)y_2 = (24 - 18)\,x_1 + (24 - 19)x_2 + (24 - 20)x_3 + (24 - 21)\,x_4 + (24 - 22)\,x_5 + (24 - 23)\,x_6$
En considérant y1 comme la somme de 4 termes : y'1, y'4, y'5, y6, il y aura autant de termes dans l'un et l'autre membre et ainsi l'égalité s'écrit :
$(26 - 24)y'_1 + (25 - 24)y_2 + (26 - 24)y_3 + (26 - 24)y'_4 + (26 - 24)y'_5 + (26 - 24)y'_6 = (24 - 18)\,x_1 + (24 - 19)x_2 + (24 - 20)x_3 + (24 - 21)\,x_4 + (24 - 22)\,x_5 + (24 - 23)\,x_6$

Ensuite, Denoville obtient l'égalité des deux sommes en réalisant l'égalité terme à terme des produits comme dans l'exemple précédent.

La même idée est adaptée au cas d'un nombre impair de lingots.