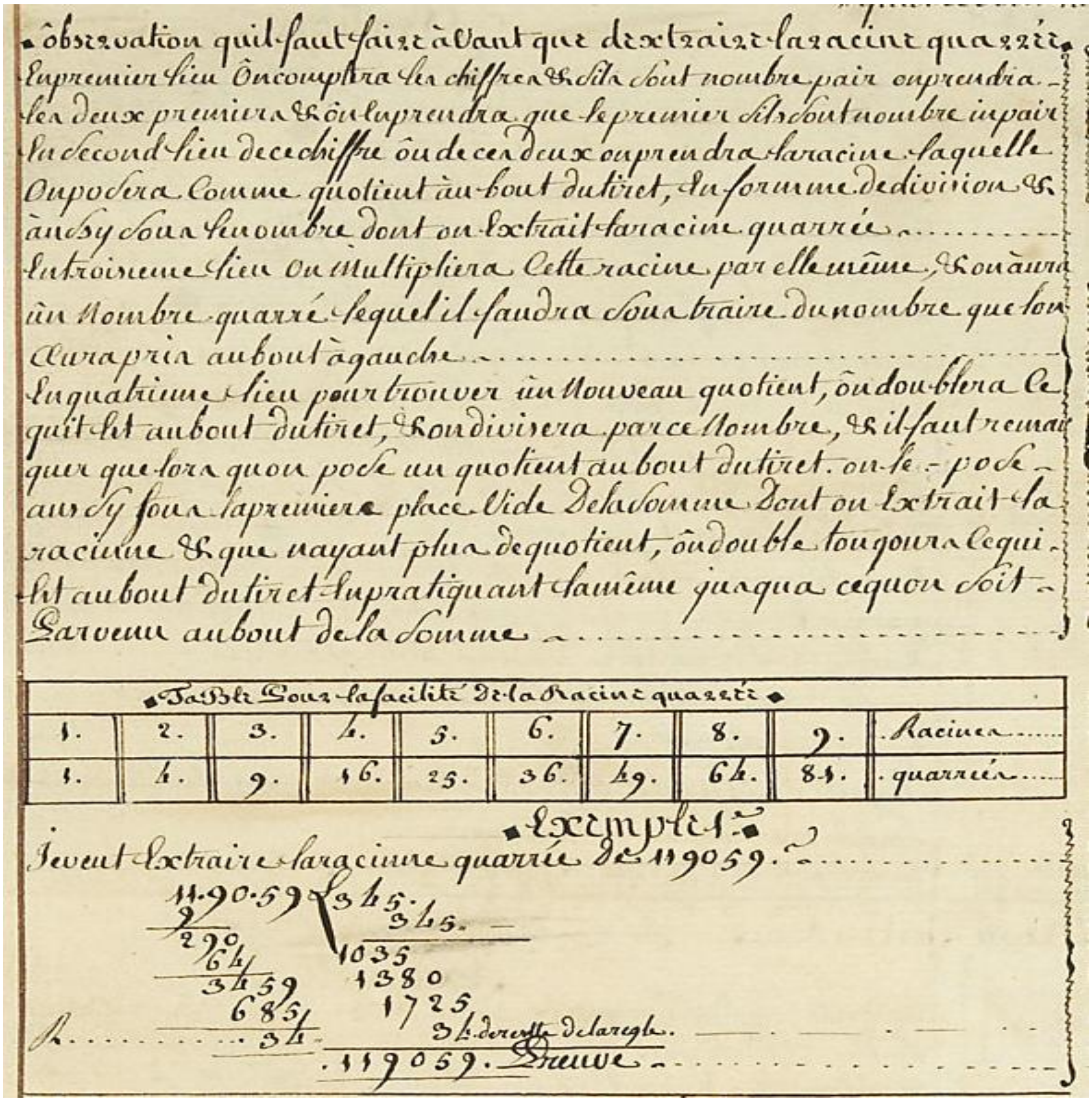
Voici le contenu du début de la partie 6 de l'arithmétique. Denoville détaille l'extraction de la racine carrée puis cubique d'un nombre.

Sixième Partie de l'arithmétique

Racine Carrée

Tout nombre multiplié par lui-même produit un nombre carré comme 8 fois 8 font 64 nombre carré dont la racine est 8.
7 fois 7 font 49, nombre carré dont la racine est 7



• observation quil faut faire avant que dextraire la racine quarrée
En premier lieu On comptera les chiffres & sils sont nombre pair on prendra les deux premiers & on nen prendra que le premier sils sont nombre inpair
En second lieu de ce chiffre ou de ces deux on prendra la racine laquelle On posera comme quotient au bout du tiret, en forme de division & ainsy sous le nombre dont on extrait la racine quarrée ....
En troisieme lieu On Multipliera cette racine par elle même, & on aura un Nombre quarré lequel il faudra soustraire du nombre que lon aura pris au bout a gauche ....
En quatrieme lieu pour trouver un Nouveau quotient, on doublera ce qui est au bout du tiret, & on divisera par ce Nombre, & il faut remarquer que lors quon pose un quotient au bout du tiret. on le pose aussy sous la premiere place vide de la somme dont on extrait la racine & que nayant plus de quotient, on double tousjours ce qui est au bout du tiret en pratiquant la même jusqua ce quon soit parvenu au bout de la somme ....

• Table pour la facilité de la Racine quarrée •

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Racines
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	quarrées

• Exemples •

Je veut extraire la racine quarrée de 119059. ....

11.90.59 | 345.

345.

1035

1380

1725

R .... 34 .... 34 de reste de la regle

119059. Preuve

Nous allons décrypter le texte de Denoville, l'appliquer et le justifier

Observation *qu'il faut faire avant que d'extraire la racine carrée En premier lieu on comptera les chiffres et s'ils sont en nombre pair on prendra les deux premiers et on n'en prendra que le premier s'ils sont en nombre impair.*

En second lieu *de ce chiffre ou de ces deux on prendra la racine laquelle on posera comme quotient au bout du tiret, en forme de division et aussi sous le nombre dont on extrait la racine carrée*.(en fait, il faut poser son carré sous ce nombre)
En troisième lieu *on multipliera cette racine par elle-même, et on aura un nombre carré lequel il faudra soustraire du nombre qu'on aura pris au bout à gauche.*
En quatrième lieu *pour trouver un nouveau quotient, on doublera ce qui est au bout du tiret et on divisera par ce nombre, et il faut remarquer que lorsqu'on pose un quotient au bout du tiret on le pose aussi pour la première place vide de la somme dont on extrait la racine et que n'ayant plus de quotient, on double toujours ce qui est au bout du tiret en pratiquant de même jusqu'à ce qu'on soit parvenu au bout de la somme.*

Exemple 1

Je veux extraire la racine carrée de 119059

Observer le nombre de chiffres qui ici est pair et faire des tranches de deux chiffres, on prend les deux premiers chiffres soit 11 — 11.90.59

On prend la racine carrée, 3, on trace le symbole de la division et on met le 3 à la place du quotient et son carré sous 11d'où on le retranche , il vient 2
Puis on abaisse la tranche suivante (2ème et 3ème lieu)

On double le 3 qui est au bout du tiret et le 6 est posé sous 290 et on divise 29 par 6,

11	90	59	3 .
9			
2	90		
	6 .		

on trouve 4 qu'on pose au bout du tiret et à la place vide à coté du 6 d'où :

4 fois 64 vaut 256 ôté de 290, il reste 34

11	90	59	3 4
9			
2	90		
	64		
	34		

On recommence en abaissant la tranche suivante, le double de 34 est 68 qu'on écrit sous 45 car on laisse une place vide pour le futur quotient. La division de 345 par 68 donne pour quotient 5 que j'écris à côté de 68 et au bout du tiret comme dit Denoville. En soustrayant le produit de 685 par 5, on trouve 35 qu'on écrit. On a alors épuisé les tranches du nombre donné.

11	90	59	3 45
9			
2	90		
	64		
	34	59	
	6	85	
		34	

Justifions ce procédé sur cet exemple.

La méthode repose sur l'identité : $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2 + (2u + v).v$

Nous cherchons l'entier le plus grand possible dont le carré est inférieur à 119959. Cet entier a 3 chiffres
Il s'écrit « abc »
I) Nous cherchons le plus grand a tel que $(100a)^2 \leq 119\,059$, nous trouvons : a = 3

11	90	59	3 45
- 9	00	00	$300^2 = 90000$
2	90	59	
-2	54	00	640 × 40 = 25400
	34	59	
	-34	25	685 × 5 = 3 425
		34	

II) Nous cherchons le plus grand entier b tel que $(300 + b\times10)^2 \leq 119\,059$
Ou tel que : $300^{\,2} + 2 \times 300 \times b \times 10 + (b \times 10)^2 \leq 119\,059$
Ou tel que : $300^{\,2} + (2 \times 300 + b \times 10)\times b\times10 \leq 119\,059$; il vient b = 4 et $119\,059 = 340^2 + 3459$
III) Nous cherchons le plus grand entier c tel que $(340 + c^2 \leq 119\,059$
Ou tel que : $340^{\,2} + 2 \times 340 \times c + c^2 \leq 119\,059$
Ou tel que : $340^{\,2} + (2 \times 340 + c)\times c \leq 119\,059$; il vient c = 5 et $119\,059 = 345^2 + 34$.

Avant l'arrivée des machines à calculer dans les classes, on enseignait encorecette méthode d'extraction de racine carrée.

Racine cube

Voici la présentation de Denoville

Le cube est un corps solide à trois dimensions qui sont la longueur, la largeur et la profondeur, les deux premières doivent être connues comme deux lignes qui multipliées l'une par l'autre……………… étant dues font une superficie laquelle multipliée par sa hauteur ou profondeur, fait un cube : ou solide.
Par exemple, on suppose qu'une masse de terre ait 6 toises de largeur, 6 de longueur et 6 de profondeur, disant 6 fois 6, on aura 36 toises carrées pour la superficie de cette masse et multipliant cette superficie par la profondeur qui est 6, on aura pour toute la masse 216 toises cube, dont la racine est 6.
On voit par là qu'un cube a 6 faces carrées et égales, comme on peut remarquer dans la figure d'un dé à jouer.
Il faut remarquer que carrer un nombre, c'est le multiplier une fois par lui-même, comme 5 fois 5 font 25, nombre carré.
Cuber un nombre c'est le multiplier 2 fois par lui-même, comme 5 fois 5 font 25 et 5 fois 25 font 125, nombre cube.
Après avoir donné la table des cubes des entiers de 1 à 9, il calcule 7 racines cubiques et pour le dernier calcul il explique la procédure ce que nous allons étudier.

Exemple 7
On demande la racine cube de 78 645

Pratique

1ère opération : ayant retranché 3 figures de droite à gauche, il reste 78			
on organise les chiffres du nombre par tranches de 3 de droite à gauche	78	645	4
De 78 racine cube est 4 qu'on met au quotient dont le cube est 64 qu'il faut poser sous les 78 et les soustraire, il reste 14.	- 64		
	14	645	
2ème opération : au bout des 14 on abaissera les 645			
On aura les 14 645 auxquels il faut chercher un diviseur ; en carrant, on aura 16 qu'il faut tripler et o n aura 48 pour diviseur. Ensuite il faut dire en 14 combien de fois 4 ? il y a 2 qu'il faut poser au quotient et dire 2 fois 8 font 16 pour lesquels il faut poser 6 sous la première figure que l'on a abaissé, ensuite 2 fois 4 font 8 et 1 que l'on a retenu font 9. ($3 \times 4^2 \times 2 = 96$)	9	6	
3éme opération : puis il faut carrer 2, on aura 4, qu'il faut tripler ce qui donnera 12 qu'on multipliera par 4 qui est la première figure du quotient, il viendra 48 qu'il faudra poser en avançant de l'espace d'une figure vers la droite ; il faut ensuite cuber les 2 du quotient, il viendra 8 qu'on posera en avant encore de l'espace d'une figure aussi vers la droite		48 8	
Ces 3 dernières sommes additionnées feront 10 088	10	088	
Que l'on soustraira de 14 645, restera 4557, comme on le voit sur l'exemple 7	*4*	*557*	

Auxquels on ajoutera 3 zéros si l'on veut trouver des dixièmes, ensuite on opérera comme en la 2ème opération.
Pour la preuve, on cube le quotient et on ajoute le reste de l'extraction.
Ici, $42^3 = 74\,088$, en ajoutant 4557, on retrouve 78 645.

Justification.
Cette méthode repose sur le développement de $(u + v)^3$
En effet, $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ et $(u + v)^3 = (u + v)^2(u + v)$
d'où $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.
On commence toujours par mettre les chiffres du nombre par tranches de 3 à partir de la droite.
Dans le cas qui nous occupe, on cherche l'entier le plus grand possible dont le cube est inférieur à 78 645.
Ce nombre a deux chiffres, il s'écrit ab, il vaut $10a + b$.
Le cube s'écrit donc : $1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$; a sera obtenu en prenant le plus grand entier de cube inférieur à 78.
La différence entre ce cube et 78 645doit être approchée par $300a^2b + 30ab^2 + b^3$
On a l'idée de diviser celle-ci par $300a^2$ et de prendre pour valeur de b le quotient. Si celui-ci devait s'avérer trop grand, on essaierait l'entier immédiatement inférieur.

Puisque $4^3 = 64$ alors que $5^3 = 125$, a vaut 4.			
	78	645	4
$40^3 = 64000$, ôté de 78645, il reste 14 645	-64	000	
	14	645	
$300a^2$ vaut alors 4800, diviser 14 645 par 4800 demande à diviser 14 par 4, il vient 3 mais il s'avérera trop grand, en fait il faut prendre 2.	9	600	
Prenant b = 2, $300a^2b = 9600$			
Puis $30ab^2 = 30 \times 4 \times 4 = 480$		480	

Enfin $b^3 = 8$		8
$300a^2b + 30ab^2 + b^3 =$ *10 088*	10	088
Que l'on soustraira de 14 645, restera 4557 .	*4*	*557*

La prise en compte des zéros explique la phrase de Denoville : « *qu'il faudra poser en avançant de l'espace d'une figure vers la droite* » ; figure veut dire chiffre.

S'il y a plus de chiffres, on recommence cette procédure autant de fois que nécessaire.