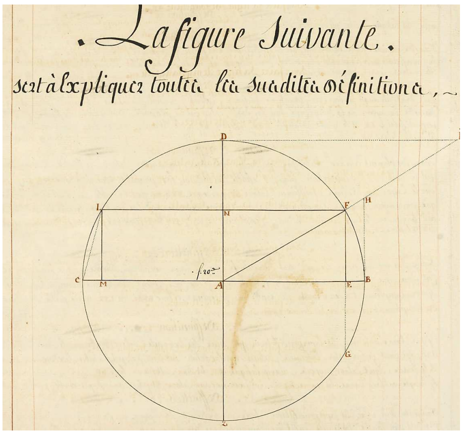
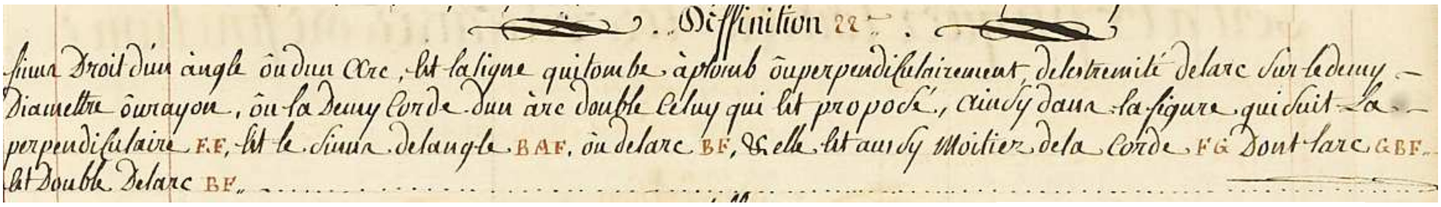
1. Les lignes trigonométriques de Denoville

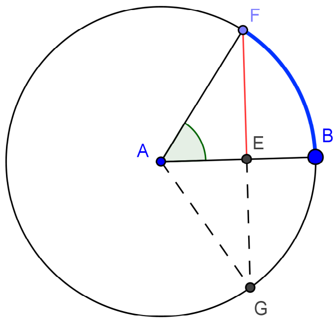


Les définitions sont données, sans plus d'exemple, à la deuxième page du chapitre *Définitions géométrique(s) et trigonométrique(s)*, en faisant référence à une figure située sur la page suivante du manuscrit. La trigonométrie développée ici concerne des angles ou des arcs, en général moindres que 90°, parfois obtus. Guère plus au demeurant que les besoins d'un pilote... Il ne s'agit pas d'écrire un traité destiné aux savants ! À tout seigneur, tout honneur, Denoville commence par le sinus, une des plus anciennes lignes trigonométriques[1].

Le sinus de Jean-Baptiste


Diffinition 22
Sinus Droit d'un angle ou d'un Arc, est la ligne qui tombe à plomb ou perpendiculairement de l'extremité de l'arc sur le demy-diametre ou rayon, ou la demy Corde d'un arc double celuy qui est proposé, ainsy dans la figure qui suit la perpendiculaire E.F, est le sinus de l'angle BAF, ou de l'arc BF, & elle est aussy moitiez de la Corde FG dont l'arc GBF est Double de l'arc BF.

Sinus droit d'un angle ou d'un arc est la ligne qui tombe à plomb ou perpendiculairement de l'extrémité de l'arc sur le demi diamètre ou rayon, ou la demi corde d'un arc double celui qui est proposé, ainsi dans la figure qui suit la perpendiculaire EF est le sinus de l'angle BAF ou de l'arc BF, & elle est aussi moitié de la corde FG dont l'arc GBF est double de l'arc BF.



Reprenant ce que dit Denoville, le sinus droit[2] de l'**angle** $\widehat{BAF}$ ou de l'**arc** $\widehat{BF}$ est le segment *EF*, ou sa longueur selon les cas. C'est aussi la demi-corde[3] de l'arc double $\widehat{FG}$. En supposant le rayon égal à 1, on n'est pas loin de la définition moderne... D'autant que la disposition proposée évoque quelque peu celle de notre bon vieux cercle trigonométrique... Qu'en est-il exactement ?

Les apparences sont trompeuses, et quelques nuances doivent être apportées... D'abord le sinus est essentiellement vu comme une **ligne**[4] – ou dans les calculs, comme la longueur de cette ligne – c'est-à-dire un **segment géométrique**, que l'on peut construire à partir d'un arc donné, comme on construit sa corde, ou comme on construit une hauteur dans un triangle. En particulier, le sinus n'est ni le rapport de deux longueurs, ni un nombre avec un signe, comme on peut le voir de nos jours en collège ou en lycée. Ensuite pas plus les arcs que les angles ne sont orientés... Comme pour les longueurs des segments, ces grandeurs se mesurent par des nombres positifs.

Enfin, on travaille avec un arc dont le rayon n'est à aucun moment précisé : il n'a aucune raison d'être égal à 1, comme c'est le cas actuellement ; pour tout dire, il est même quelconque. Les nombres décimaux, pourtant connus à l'époque, n'ont pas encore l'immense notoriété qu'ils ont acquise de nos jours ; aussi, pour éviter l'« embarras » des fractions et avoir des entiers, la valeur du sinus est souvent tabulée pour des rayons égaux à 10^5... ce que montrent les deux extraits de table suivants[5] :

[1] La plus ancienne étant la corde, introduite par les Grecs de l'Antiquité. La corde est encore utilisée en 1760 via l' « échelle des cordes » ; **P XX**
[2] On omet dans la pratique le qualificatif *droit*. Ce qualificatif permettait de différencier le *sinus droit* du *sinus verse*, une autre ligne que définit Denoville, mais dont il ne fait pas usage.
[3] On retrouve ici, très sommairement, le lien entre le sinus et la corde. Historiquement, le sinus d'un arc est défini chez les Indiens comme la moitié de la corde de l'arc double.
[4] La terminologie *ligne trigonométrique* se rencontrait encore dans des programmes que certains de nos lecteurs ont dû pratiquer, tout comme l'auteur de ces lignes !
[5] Tables de Seller

D.	Sinus	Tang	Secant
	1. M. 29	29	100000
1	1745	1746	100015
2	3490	3492	100061
3	5234	5241	100137
4	6976	6993	100244
5	8716	8749	100382
6	10453	10510	100551

	Sinus	Tang.	Secante
	100000	343774667	343774682
89	99985	5728996	5729865
88	99939	2863625	2865371
87	99863	1908114	1910732
86	99756	1430067	1433559
85	99619	1143005	1147371
84	99452	951436	956677

Ainsi le sinus de 4° est égal à 6976, le sinus de 84° vaut 99452 et le sinus de 90° vaut... 100 000, valeur du rayon choisi pour la table considérée. Le sinus de 90°, le plus grand que l'on puisse rencontrer, est appelé *sinus total*, ou parfois *rayon*. Comparons avec ce que donne une calculatrice de nos jours :

```
■ sin(4°)                    .069756473744
sin(4°)
ARIT          DEG AUTO          FUNC 18/30
```

Pour éviter toute ambiguïté, nous précéderons, dans ce chapitre consacré à l'analyse de la trigonométrie de Denoville, les lignes trigonométriques « à la mode Denoville » d'un d minuscule : dsin, dtan, dsec... On constate à l'arrondi près que dsin 4° = 10^5 sin 4°.

Le sinus de l'angle obtus

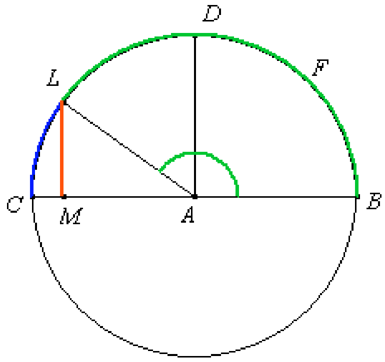
Curieusement, notre pilote dieppois distingue, dans la définition 24, le cas particulier où l'angle est obtus : redondance et souci d'être clair sans doute, car ce qu'il a dit dans la définition 22 pour le sinus d'un angle aigue est valable pour un angle moindre que 180°.
Au demeurant, et tant que l'on n'a pas l'idée de travailler avec des signes[6], des problèmes peuvent se poser avec un angle obtus. Pas pour le sinus, car on sait bien de nos jours que $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$: on peut donc voir le sinus d'un angle obtus comme une ligne trigonométrique, la longueur d'un segment.

Définition. 24.

Sinus d'un arc au dessus de 90d. n'est autre chose que le sinus de son Complément à deux droits ou 180d. C'est a dire, que l'arc proposé étant de 120d. le sinus de 60d. qui reste de la soustraction du demy cercle est le sinus Complément a deux droits de 120d: ainsy le sinus de l'arc BFDL. est LM. parce quelle est sinus de l'arc CL, Complément a deux droits de l'arc BFDL.

Sinus d'un arc ***au dessus de 90°*** *n'est autre chose que le sinus de son complément à deux droits ou 180°. C'est-a-dire que l'arc proposé étant de 120° le sinus de 60° qui reste de la soustraction du demi cercle est le sinus complément à deux droits de 120° : ainsi le sinus de l'arc BFDL est LM parce que elle est sinus de l'arc CL, complément à deux droits de l'arc BFDL.*

Ainsi, puisque les arcs $\widehat{BFDL}$ et $\widehat{CL}$ sont supplémentaires[7], leurs sinus sont les mêmes, d'après la définition 24.



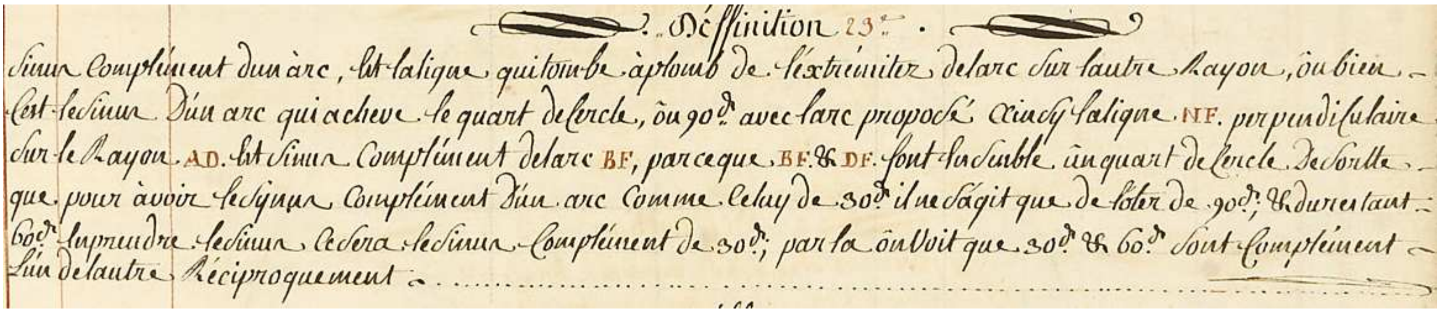
La définition 22 s'applique parfaitement à un angle obtus : à la manière de Denoville, on peut affirmer que *la ligne qui tombe perpendiculairement de l'extrémité L de l'arc sur le demi diamètre AC est bien LM.*

Un cosinus sans nom

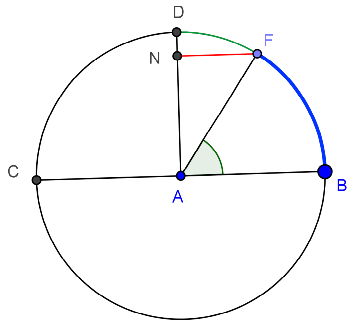
On pourrait se contenter du sinus[8], mais, au fil du temps et des problèmes à résoudre, on a pris l'habitude de travailler avec d'autres lignes trigonométriques, qui, comme le sinus, sont tabulées. Tout d'abord la définition 23 propose celle du *sinus complément* d'un arc, ce que nous appelons aujourd'hui… cosinus :

---

[6] Il faut attendre le XIXe siècle pour que l'apparition des signes en trigonométrie soit générale.
[7] *Complémentaires à deux droits*, dit Jean-Baptiste...
[8] Comme Regiomontanus au XVe siècle…


Déffinition 23e.
Sinus Complément d'un arc, est la ligne qui tombe aplomb de l'extrémitez de l'arc sur l'autre Rayon, ou bien c'est le sinus d'un arc qui achève le quart de cercle, ou 90d. avec l'arc proposé. ainsy la ligne NF. perpendiculaire sur le Rayon AD. est sinus Complément de l'arc BF, parceque BF. & DF. font ensemble un quart de cercle de sorte que pour avoir le sinus Complément d'un arc Comme celuy de 30d. il ne s'agit que de l'oter de 90d. & du restant 60d. en prendre le sinus ce sera le sinus Complément de 30d. par la on voit que 30d. & 60d. sont Complément l'un de l'autre Réciproquement.

Sinus complément d'un arc est la ligne qui tombe aplomb de l'extrémité de l'arc sur l'autre rayon, ou bien c'est le sinus d'un arc qui achève le quart de cercle ou 90° avec l'arc proposé. Ainsi la ligne NF perpendiculaire sur le rayon AD est sinus complément de l'arc BF, parce que BF & DF font ensemble un quart de cercle de sorte que pour avoir le sinus complément d'un arc comme celuy de 30° il ne s'agit que de l'ôter de 90° & du restant 60° en prendre le sinus ce sera le sinus complément de 30°, par la on voit que 30° et 60° sont complément l'un de l'autre réciproquement.

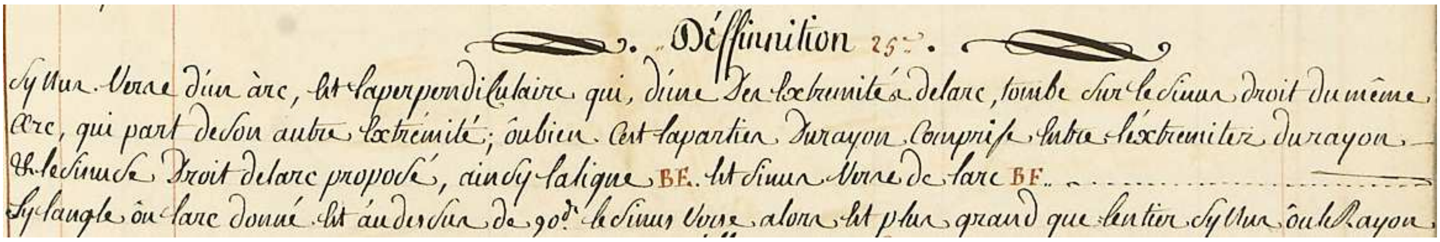


Au lieu d'abaisser la perpendiculaire passant par *F* sur le rayon *AB*, pour obtenir le sinus, on abaisse cette fois la perpendiculaire passant par *F* sur l'autre rayon *AD*. Comme son nom le laisse entendre, le **sinus complément** de l'arc $\widehat{BF}$ [9] est le sinus du complément de l'arc $\widehat{BF}$, qui n'est autre que $\widehat{FD}$ [10]. Si on applique la définition du sinus d'un arc à ce complémentaire $\widehat{FD}$, on obtient bien la ligne *FN*.

Nouvelle ligne trigonométrique ou pas ? En apparence, ce n'est qu'une sorte de sinus... même s'il est appliqué au complémentaire... Mais ce *sinus complément* intervient si souvent en trigonométrie qu'on a fini par lui donner un nom[11] : le cosinus de l'arc $\widehat{BF}$ ou de l'angle $\widehat{BAF}$.

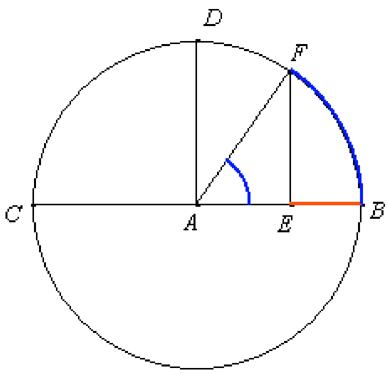
Le sinus verse, un archaïsme

Puis dans la définition 25 arrive le *sinus verse*.


Déffinition 25e.
Sinus Verse d'un arc, est la perpendiculaire qui, d'une des extrémités de l'arc, tombe sur le sinus droit du même arc, qui part de son autre extrémité; ou bien c'est la partie du rayon comprise entre l'extrémitez du rayon & le sinus droit de l'arc proposé, ainsy la ligne BE. est sinus Verse de l'arc BF.
Si l'angle ou l'arc donné est au dessus de 90d. le sinus Verse alors est plus grand que l'entier sinus ou le Rayon.

Sinus Verse d'un arc est la perpendiculaire qui, d'une des extrémités de l'arc, tombe sur le sinus droit du même arc qui part de son autre extrémité ; ou bien c'est la partie du rayon comprise entre l'extrémité du rayon & le sinus droit de l'arc proposé, ainsi la ligne BE est sinus verse de l'arc BF.
Si l'angle ou l'arc donné est au dessus de 90° le sinus verse alors est plus grand que l'entier sinus ou le rayon.

C'est le segment [*BE*] du dessin ci-contre, ou sa longueur si l'on préfère. Le sinus verse[12] est une ligne trigonométrique complètement tombée en désuétude de nos jours. Denoville l'introduit ici, mais ne l'utilise pas dans la suite de son traité.

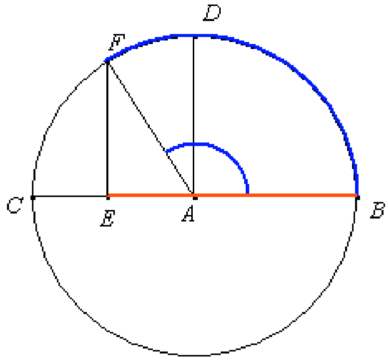


[9] Sans que cela soit dit, on suppose implicitement que l'angle *BAF* est inférieur à un droit.
[10] À eux deux, ils font bien 90°, ou un quadrant.
[11] Pas chez Denoville, qui s'appuie sur une tradition ancienne. Cependant, Euler, en 1748, parle ouvertement de cosinus, pour des travaux certes de nature plus théorique. Nous l'appelerons dsincomp, ou dcos, si nécessaire dans un calcul.
[12] Verse vien du latin *versus*, tourné, par opposition au sinus droit, *rectus*.

Avec un symbolisme moderne, le sinus verse de l'angle *aigu* $\widehat{BAF}$ est égal à :

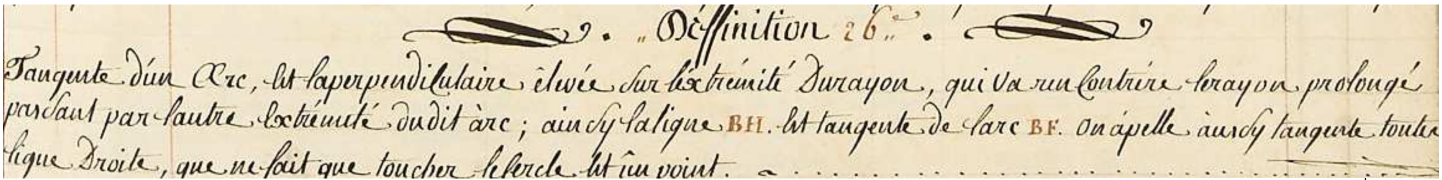
$$BE = AB - AE = R - \text{dsincomp } \widehat{BAF} = R - \text{dcos } \widehat{BAF}.$$

Si l'angle est obtus, le sinus verse dépasse le *rayon du cercle* ou le *sinus total*, comme le montre la figure suivante. Remarquons que la formule précédente demeure valable... à condition de considérer que le « dcosinus » est négatif pour un angle compris entre 90° et 180°... ce que ne faisait pas Denoville. Autrement dit, travailler avec le sinus verse d'un angle obtus, grandeur *positive* comme toutes les lignes trigonométriques, est une façon d'accepter, sans même en être conscient mathématiquement, que le cosinus puisse être négatif...



La tangente salvatrice

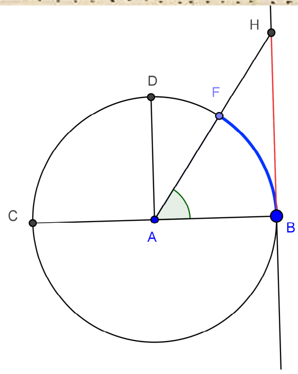
Autre grand classique de la trigonométrie, prêt à rendre bien des services quand le sinus ne peut plus suffire, et d'ailleurs toujours en vigueur, la **tangente**... avec une définition géométrique comme il se doit...



Définition 26e.

Tangente d'un Arc, est la perpendiculaire élevée sur l'extrémité du rayon, qui va rencontrer le rayon prolongé passant par l'autre extrémité dudit arc ; ainsy la ligne BH. est tangente de l'arc BF. On apelle aussy tangente toute ligne droite, que ne fait que toucher le cercle en un point.

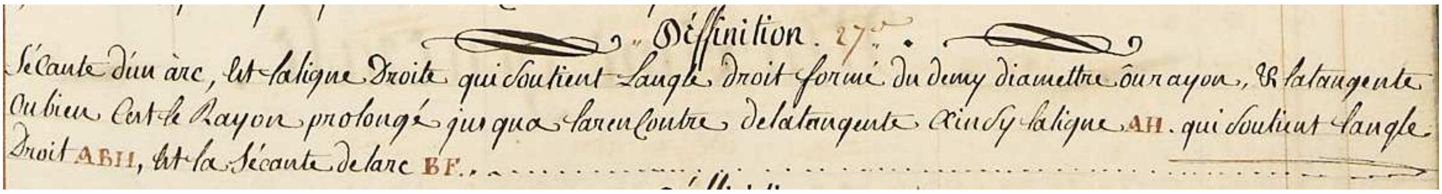
Tangente d'un arc, est la perpendiculaire élevée sur l'extrémité du rayon, qui va rencontrer le rayon prolongé passant par l'autre extrémité du dit arc ; ainsi la ligne BH est la tangente de l'arc BF. On appelle aussi tangente toute ligne droite, qui ne fait que toucher le cercle en un point.



La tangente de l'angle $\widehat{BAH}$ est donc ici la ligne *BH* mesurée sur la tangente au cercle en *B*, d'où son nom d'ailleurs. On retrouve avec cette figure l'interprétation moderne, avec les mêmes restrictions bien sûr que pour le sinus. La tangente intervient très fréquemment dans la trigonométrie, celle de Denoville, ou la nôtre d'ailleurs.

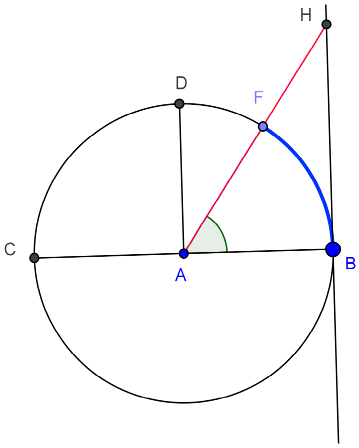
La sécante, une oubliée

Une autre ligne trigonométrique qu'introduit Denoville, complètement tombée en désuétude de nos jours, est la sécante.



Définition 27e.

Sécante d'un arc, est la ligne droite qui soutient l'angle droit formé du demy diamettre ou rayon, & la tangente. Ou bien c'est le rayon prolongé jusqu'a la rencontre de la tangente. ainsy la ligne AH. qui soutient l'angle droit ABH, est la sécante de l'arc BF.



Sécante d'un arc, est la ligne droite qui soutien l'angle droit formé du demi diamètre ou rayon, & la tangente ou bien c'est le rayon prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente. Ainsi la ligne AH qui soutient l'angle droit ABH est la sécante de l'arc BF.

La sécante de l'arc $\widehat{BF}$ est ici la ligne *AH* qui est bien, au sens géométrique, sécante au cercle. Cette ligne a été utilisée jusqu'à la première moitié du XXe siècle, particulièrement en navigation. La sécante est l'inverse du cosinus, elle intervient dans le calcul des latitudes croissantes des cartes marines.

Cette ligne trigonométrique est en relation avec les précédentes. En effet, si l'on applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle *ABH*, on obtient :

$$AB^2 + BH^2 = AH^2$$

soit en utilisant les lignes trigonométriques :

$$R^2 + \mathrm{dtan}^2\,\widehat{BF} = \mathrm{dsec}^2\,\widehat{BF}\ ,$$

ce qui montre le lien entre la sécante et la tangente.

Une autre relation peut être obtenue en utilisant le théorème de Thalès[13] dans le triangle *ABH*, avec la sécante *FE* parallèle à *BH* :

$$\frac{EF}{BH} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AB}\ .$$

En remplaçant par les lignes trigonométriques telles qu'elles ont été définies, la deuxième de ces égalités donne :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dcos}\,\widehat{BF}}{R} = \frac{R}{\mathrm{dsec}\,\widehat{BF}}}$$

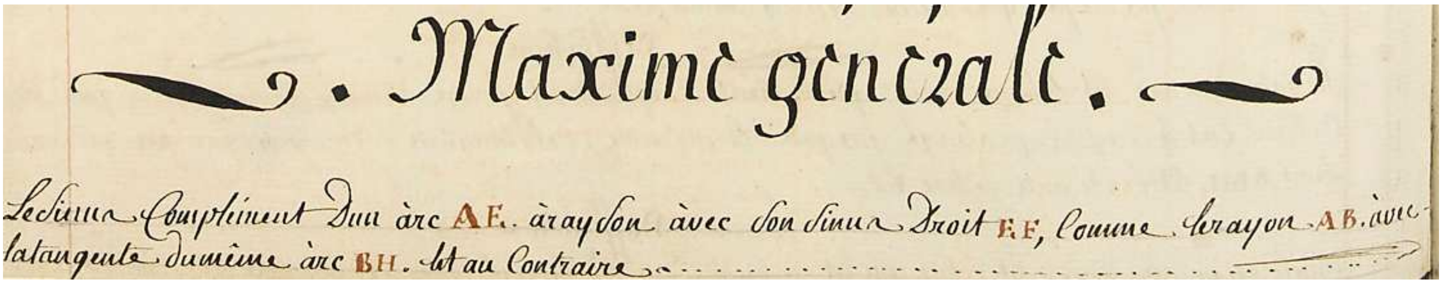
La sécante est donc liée au cosinus[14] , mais Denoville ici n'en souffle mot dans son texte. Il écrit un traité de navigation, et les exemples de résolution de triangle l'intéressent bien plus qu'une présentation rigoureuse et complète de la trigonométrie, qui serait celle par exemple d'un mathématicien.

Une formule bien connue

Faisons provisoirement un saut vers la fin de ce paragraphe de définitions : la *maxime générale* que Denoville énonce donne un lien entre le sinus et la tangente. Voilà au passage un mot, *maxime*, qui ne relève plus de nos jours du vocabulaire mathématique. En s'en tenant au sens littéraire[15], une maxime est une forme brève, pour être facilement mémorisée, qui vise à tenir un discours universel sur l'homme, tout en frappant l'esprit.

Le sens mathématique, tel qu'il était perçu par un lecteur du XVIIIe siècle, est très proche finalement : il s'agit ni plus ni moins d'une affirmation de caractère général, on dirait aujourd'hui un théorème, qu'il est tout particulièrement important de connaître sur le bout des doigts[16], si l'on veut maîtriser ici la trigonométrie.

Que dit donc cette importante maxime ?


Maxime generale.
Le Sinus Compliment d'un arc AE. a rayson avec son Sinus Droit EF, Comme le rayon AB. avec la tangente du même arc BH. Est au Contraire

Le sinus complément d'un arc AE a rayson avec son sinus droit EF, comme le rayon AB avec la tangente du même arc est au contraire.

La *rayson* de Denoville évoque ici un quotient[17]. La maxime affirme tout simplement que

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BH} \text{ ou } \boxed{\frac{\mathrm{dcos}\,\widehat{BF}}{\mathrm{dsin}\,\widehat{BF}} = \frac{R}{\mathrm{dtan}\,\widehat{BF}}}.$$

---

[13] Nom moderne, et typiquement franco-français, d'un théorème que l'on rencontre dans les *Éléments* d'Euclide, au IIIe siècle avant Jésus-Christ (proposition II du livre VI).

[14] En particulier, lorsque le rayon vaut 1, on retrouve le fait que $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, que l'on rencontre quelquefois dans certains manuel du XXe siècle.

[15] Du latin *maxima (sententia)* : la sentence la plus grande, la plus générale. Qui ne connaît pas les célèbres *Maximes* de la Rochefoucauld ?

[16] De même, il est essentiel de connaître par coeur les tables de multiplications pour pouvoir faire effectivement des multiplications...

[17] Un nombre rationnel n'est-il pas aujourd'hui un nombre qui s'écrit comme quotient de deux entiers ?

Elle souligne le lien entre la tangente, et le sinus –le dcos étant le sinus de l'arc complémentaire. La formule est évidemment plus simple dès l'instant que l'on suppose que $R = 1$.
La démonstration est immédiate, mais elle n'est pas donné par notre marin Elle résulte de la première des égalités précédemment écrite en appliquent le théorème de Thalès.