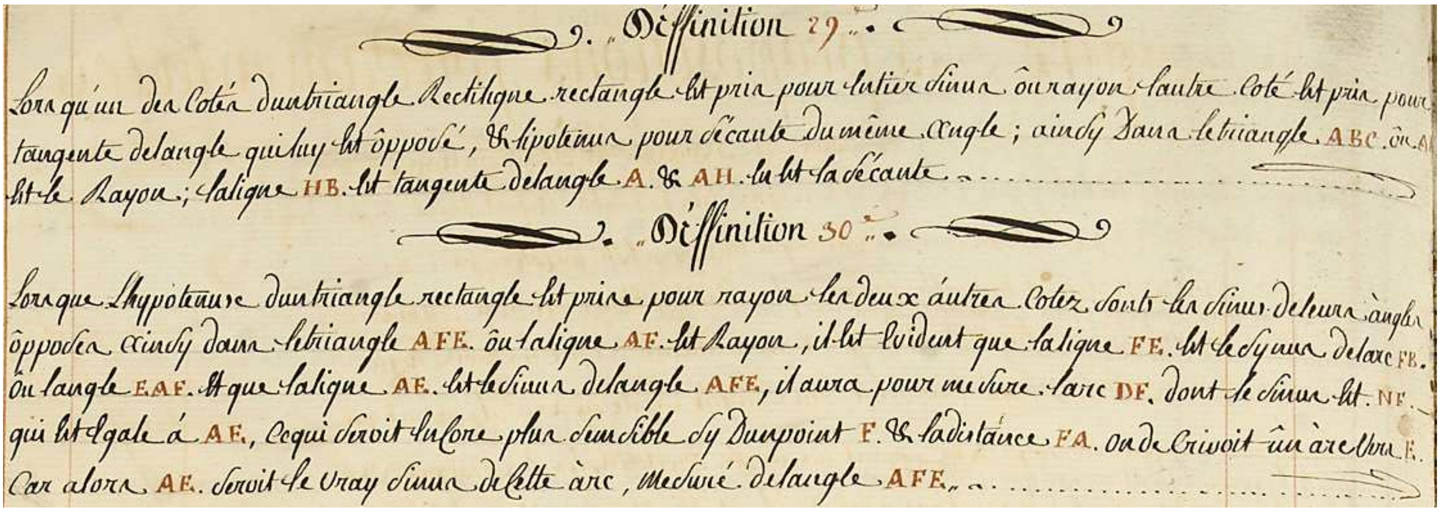
2. Deux outils indispensables

Un regard en guise de formule

Puisque la trigonométrie prétend donner des outils pour pouvoir résoudre des triangles, il serait grand temps d'en parler, pensez-vous... Ce que fait Denoville aux définitions 29 et 30, les deux dernières qu'il donne, définitions qui, au contraire des précédentes, sont d'ailleurs plutôt des théorèmes[1]. Et l'on se rend compte que la trigonométrie s'applique au triangle rectangle !


Déffinition 29
Lors qu'un des Cotés d'un triangle Rectiligne rectangle est pris pour entier sinus ou rayon l'autre Coté est pris pour tangente de l'angle qui luy est opposé, & l'ipotenuse pour sécante du même angle ; ainsy dans le triangle ABC où A... est le Rayon ; la ligne HB est tangente de l'angle A & AH en est la sécante.
Déffinition 30
Lorsque l'hypoténuse d'un triangle rectangle est prise pour rayon les deux autres Cotez sont les sinus de leurs angles opposés ainsy dans le triangle AFE où la ligne AF est Rayon, il est évident que la ligne FE est le sinus de l'arc FB ou l'angle EAF et que la ligne AE est le sinus de l'angle AFE, il aura pour mesure l'arc DF dont le sinus est NF qui est égal à AE, ce qui seroit encore plus sensible sy du point F & la distance FA on décrivoit un arc vers E. Car alors AE seroit le vray sinus de cette arc, mesure de l'angle AFE.

Déffinition 29

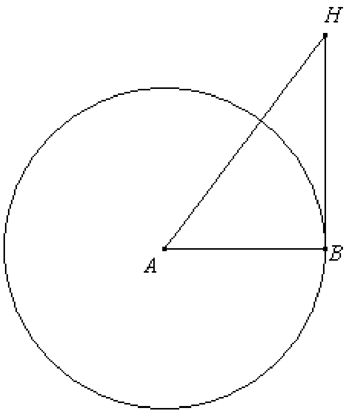
*Lorsqu'**un des côtés d'un triangle rectiligne rectangle est pris pour entier sinus ou rayon**, l'autre côté est pris pour tangente de l'angle qui lui est opposé, & l'hypoténuse pour sécante du même angle ; ainsi dans le triangle ABH* où *AB est le rayon, la ligne HB est tangente de l'angle A & AH en est la sécante.*

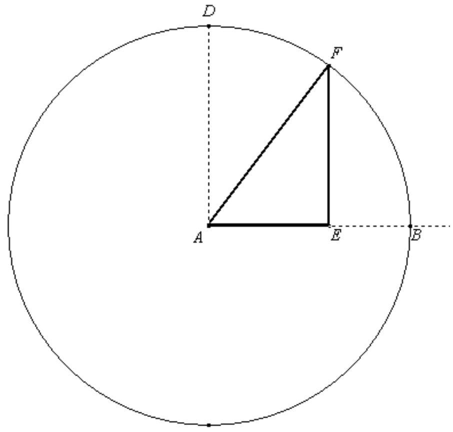
Déffinition 30

*Lorsque **l'hypoténuse d'un triangle rectangle est prise pour rayon**, les deux autres côtés sont les sinus de leurs angles opposés. Ainsi dans le triangle AFE où la ligne AF est rayon, il est évident que la ligne FE est le sinus de l'arc FB ou l'angle EAF, et que la ligne AE est le sinus de l'angle AFE, il aura pour mesure l'arc DF dont le sinus est NF qui est égal à AE, ce qui serait encore plus sensible si d'un point F & la distance FA, on décrivait un arc vers E car alors AE serait le vrai sinus de cet arc, mesure de l'angle AFE.*

On a vu précédemment que les définitions de la trigonométrie concernent des angles dont le sommet est centre d'un cercle. On procède maintenant à l'envers : partant cette fois d'un triangle rectangle, on trace un cercle centré au sommet d'un de ses angles aigus. Deux cas sont à envisager : soit on prend pour rayon un des côtés de l'angle droit (définition 29), soit on prend l'hypoténuse (définition 30).

Le premier de ces cas correspond à la figure suivante (à gauche), où le côté *AB* de l'angle droit est pris pour rayon. D'après les définitions données précédemment, *BH* est la tangente de l'angle en *A*, et *AH* en est la sécante ; le côté *AB*, quant à lui, est le rayon du cercle, donc aussi le sinus total. On retrouve bien les affirmations de la définition 29 de Denoville.





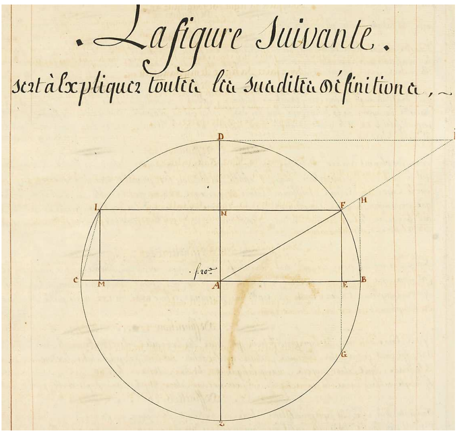
[1] Encore une imprécision mathématique de notre ami navigateur... Ceci dit, il fait tout son possible pour justifier la deuxième de ses « définitions »...

Dans le second cas (figure de droite), c'est l'hypoténuse *AF* qui sert de rayon, donc de sinus total. Comme l'affirme Denoville, *il est évident que la ligne FE est le sinus de l'arc FB, ou l'angle EAF* : il suffit d'appliquer la définition.

Reste à prouver que *AE*, l'autre côté de l'angle droit, est le sinus de l'angle $\widehat{AFE}$. C'est un peu moins « évident », et notre ami s'évertue à nous convaincre : sa « *déffinition* » en a donc un peu plus le caractère d'un théorème. Quels arguments emploie-t-il ?

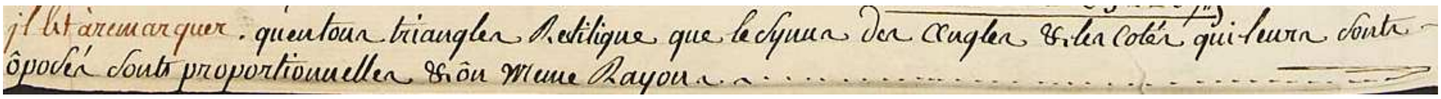
Il affirme d'abord que l'angle *AFE* a *pour mesure l'arc DF* : en effet, ils sont complémentaire l'un de l'arc $\widehat{FB}$, l'autre de l'angle $\widehat{FAE}$ [2], $\widehat{FB}$ et $\widehat{FAE}$ ayant la même mesure en degré. L'arc $\widehat{DF}$ par ailleurs a pour sinus *NF*, qui est bien égal à *AE*.
Enfin, pour emporter l'adhésion des récalcitrants, il suggère que soit tracé le cercle de centre *F* et de rayon *FA* : dans ce cas, on « voit bien » que *AE* est bien le sinus de l'angle $\widehat{AFE}$.

Pour illustrer son propos au cours de ce chapitre, Denoville s'appuie sur la figure suivante, qui *sert à expliquer toutes les susdites définitions* :

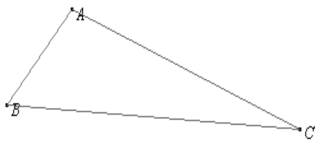


La loi des sinus

On sait qu'un triangle est caractérisé par six éléments : les longueurs des trois côtés et les trois angles, dont la somme fait 180°. Comme on l'a signalé plus haut, résoudre un triangle, c'est retrouver par le calcul les trois éléments manquants à partir des trois éléments connus[3].
Denoville s'appuie pour l'essentiel sur ce que l'on appelle de nos jours la loi des sinus, valable aussi bien pour les triangles rectangles que pour les triangles quelconques, et qu'il énonce sans démonstration[4] tout en bas de la page 128 :



Il est à remarquer qu'en tout triangle rectiligne que le Sinus des angles & les côtés qui leurs sont opposés sont proportionnels et ont même rayon.



Traduction moderne : pour un triangle *ABC* quelconque, les sinus des angles, **mesurés avec le même rayon**, sont proportionnels aux longueurs des côtés opposés. Autrement dit, on peut écrire[5]

$$\frac{\mathrm{dsin}\hat{A}}{BC}=\frac{\mathrm{dsin}\hat{B}}{AC}=\frac{\mathrm{dsin}\hat{C}}{AB}.$$

Pas de démonstration pour ce résultat d'une extrême importance... Il sera presque continuellement utilisé dans la suite.

Plutôt que d'écrire les égalités précédentes, on parlait au XVIII^e^ siècle d'*analogie* et l'on disait plutôt que $\mathrm{d}\sin\hat{A}$ est à *BC* comme $\mathrm{d}\sin\hat{B}$ est à *AC*[6].

Ainsi donc, le *Graal* de la trigonométrie, qui permet le calcul mystérieux des distances inaccessibles, a tenu pendant des siècles dans ces égalités, une simple relation de proportionnalité, non pas entre des *angles* et des côtés, mais entre des *sinus* et des côtés.

Examinons sur un **exemple** traité par Denoville (page 132, exemple I) ce que donne l'application de cette loi des sinus.

---

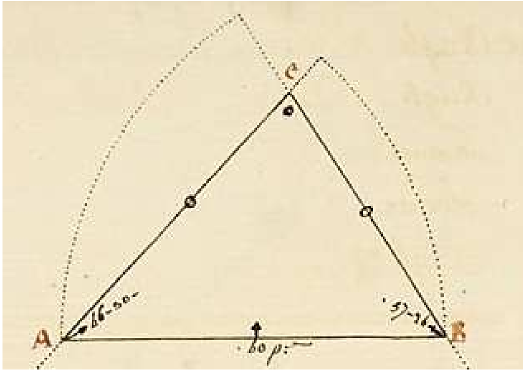
[2] Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
[3] Quand c'est possible bien évidemment. Ainsi la connaissance des seuls trois angles ne suffit pas à déterminer la longueur des côtés.
[4] C'est plus affaire de mathématicien que de marin...
[5] dsin car le rayon est quelconque, et pas forcément égal à 1. Le sinus à la sauce Denoville...
[6] Ainsi 16 est à 8 comme 80 est à 40...

Exemple 1er.

Soit donné le triangle rectiligne non rectangle ABC. Dont l'angle A est de 46°-30' l'angle B de 57°-24' le coté AB de 40 parties On demande l'angle C le coté AC & le coté BC ....

Soit donné le triangle rectiligne non rectangle ABC dont l'angle A est de 46° 30', l'angle B de 57°24', le côté AB de 40 parties ; on demande l'angle C, le côté AB & le côté BC.

La figure est la suivante :



On remarque sur le dessin que les trois éléments inconnus du triangle sont marqués à l'aide d'un petit rond, tandis que les éléments connus ont une petite flèche. La notation est habituelle dans un certain nombre d'ouvrages de cette époque.

Examinons les étapes de la résolution. Tout d'abord, le calcul de l'angle $\hat{C}$ est une formalité, sachant que la somme des trois angles doit faire 180°. On trouve 76°6' :

Pratique pour trouver l'angle C

Angle A de	46°-30'
Angle B de	57-24
Somme	103-54
ôter de	180-00
Angle C de	76-6

Ensuite le calcul du côté *AC* s'appuie sur cette célèbre loi des sinus que l'on vient d'énoncer. L' « analogie » est énoncée ainsi par Denoville :

Comme le sinus de l'angle C 76°-6' ....
est au coté AB 40 parties ....
ainsi le sinus de l'angle B 57°-24' ...
donnera le coté AC de 34p. 72/100 ....

Comme le sinus de l'angle C 76°6'
est au côté AB 40 parties
ainsi le sinus de l'angle B 57°24'
donnera le côté AC de 34 parties 72/100

Vérifions les calculs. D'après la loi des sinus, il faudrait écrire $\frac{\mathrm{dsin}\hat{C}}{AB}=\frac{\mathrm{dsin}\hat{B}}{AC}$, soit $\frac{\mathrm{dsin}76°6'}{40}=\frac{\mathrm{dsin}57°24'}{AC}$.

La lecture d'une table trigonométrique est indispensable. Celle de Bouguer[7], dont disposait sans doute notre ami Jean-Baptiste, donne :

dsin 76°6' = 97072 et dsin 57°24' = 84245

ce qui, en remplaçant dans l'égalité précédente, conduit à $\frac{97072}{40}=\frac{84245}{AC}$.

Il reste donc à déterminer la longueur *AC*. De nos jours, on écrit directement[8] : $AC=\frac{40\times \mathrm{Sin}57°24'}{\mathrm{Sin}76°6'}=\frac{40\times 84245}{97072}\approx 34,714$ ce qui est à peu de choses près la valeur donnée par Denoville[9].

Au XVIII[e] siècle, la procédure était différente : on parlait de recherche de quatrième proportionnelle : l'inconnue, ici le côté *AC*, la quatrième proportionnelle, est donc, comme le nom l'indique, systématiquement placée à la quatrième place de la proportion, autrement dit en dernier dans le discours de Denoville. On sait alors que l'on obtient cette quatrième proportionnelle inconnue en

[7] Avec un rayon, ou sinus total, de 100 000. Comme elle est de degré en degré, on doit faire une interpolation linéaire pour avoir les sinus de ces angles. Pour rester clair, nous n'évoquerons pas ici ces aspects.
[8] D'après les célèbres produits en croix... Pour les plus anciens, on peut aussi dire que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.
[9] Le calcul de l'autre côté se fait de façon analogue. Nous avons donc résolu un triangle avec la loi des sinus.

divisant le produit des moyens 40 × dsin 57°24’ par le premier terme de l’analogie dsin 76°6’ : en quelque sorte, la disposition elle-même des calculs sert de support à la mémoire, en automatisant la procédure.

Bref, à une époque ou à une autre, la réponse est la même (c’est heureux !), mais les techniques mathématiques ne sont plus tout à fait les mêmes. Il reste à faire le calcul... enfin... des dizaines et des dizaines de calculs de ce type quand on navigue sur un bateau ! De nos jours, on prendrait une calculatrice. Denoville, lui, est réduit à faire ses calculs à la main, scrupuleusement, laborieusement sans doute : passe encore pour la multiplication[10], mais la division est franchement fastidieuse ! Nul droit à l’erreur quand reposent sur vos épaules la route d’un navire, et l’avenir de ses marins... Pas de calculatrice, mais une « petite trouvaille » mathématique, qui fut en son temps une révolution...

[10] Quoique la connaissance des tables de multiplications ne s’est vraiment répandue qu’après la loi sur l’enseignement primaire obligatoire à la fin du XIX^e^ siècle...