3. Les logarithmes, une trouvaille

Inventés au début du XVII^e siècle par Néper, puis améliorés par Briggs à la même époque, ils se répandent comme une trainée de poudre dans toute l'Europe qui calcule, les astronomes et les mathématiciens au tout premier chef.
L'enjeu, ambitieux, est de remplacer les multiplications par les additions, et les divisions par des soustractions, comme l'affirme d'ailleurs Denoville :

Les logarithmes ont été inventés pour abréger les multiplications par de simples additions, & les divisions par de simples soustractions, ce qui épargne un travail infiny principalement dans les calculs astronomiques.

Qui a pratiqué quelque peu les calculs à la main, avant la généralisation du calcul électronique que l'on a connu ces dernières années, en comprendra immédiatement l'intérêt : les sommes, et différences, se calculent bien plus facilement que les produits, et quotients.

Mais que sont donc ces mystérieux logarithmes ?

Une approche de la définition

Denoville donne les lignes principales de ces mystérieux logarithmes à grands traits à la page 127 de son traité, en omettant comme d'habitude les détails mathématiques trop précis. L'important est de comprendre ce qui se passe. Signalons au passage qu'il se contente de recopier mot à mot[1], jusqu'aux exemples traités, une partie du chapitre correspondant du traité de navigation de Jean Bouguer, qu'il avait forcément en sa possession dans sa prison anglaise...

Les logarithmes sont des nombres en progression arithmétique que l'on fait répondre à d'autres en progression géométrique dont ils sont les logarithmes comme le marque les deux progressions suivantes.
Progression géométrique nombre 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64 –128 – 256 – 512 – 1024 – 2048 – 4096 – 8192
progression arithmétique logarithme 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11– 12 – 13
nombre 16384 – 32768 – 65536 – 134072 – 262144 – 524288 – 1048576
Logarithme 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20

Affaire de *progressions* donc, comme on disait autrefois[2], progressions que l'on met en vis-à-vis.
La progression *géométrique*, où tous les nombres sont *multipliés* par 2 à partir de 1 : on obtient donc la suite des puissances de 2.
La progression *arithmétique*, où l'on *ajoute* toujours 1 à partir de 0, pour obtenir la suite des entiers naturels.
Le logarithme d'un nombre de la première ligne est le nombre de la seconde qui lui correspond[3]. Autrement dit, le logarithme de 2^n est l'exposant n. Ainsi le logarithme de 64 est 6 car $64 = 2^6$.

Cette définition, bien qu'incomplète[4], permet d'illustrer les propriétés fondamentales du logarithme, en commençant par celle, la plus célèbre, qui concerne la multiplication...

Pour multiplier 128 par 32, l'on ajoute leur logarithme 7 & 5 & leur somme 12 est le logarithme de leur produit 4096. Le double du logarithme d'un nombre donne le logarithme de son carré et le triple donne celui de son cube.

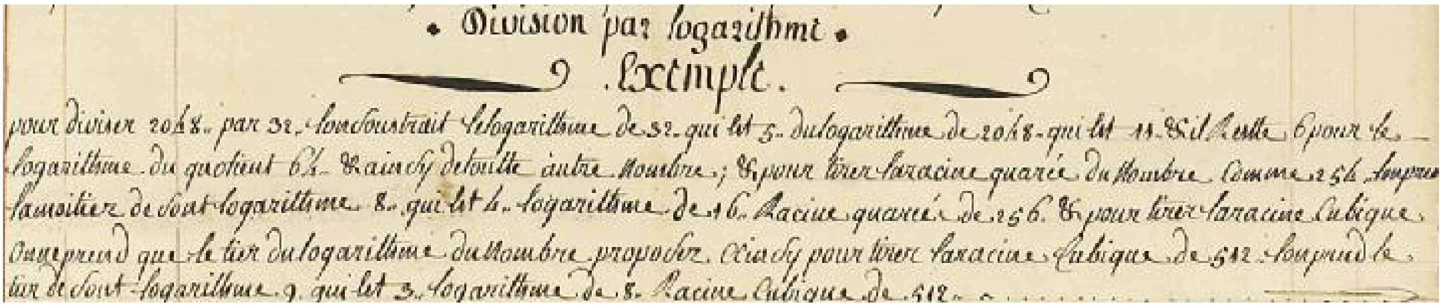
[1] Seule « innovation » : Denoville a complété la progression arithmétique jusqu'au rang 20, tandis que Bouguer s'est arrêté au rang 12.
[2] On parle aujourd'hui de suites, géométriques ou arithmétiques.
[3] Denoville définit ici ce que l'on appelle de nos jours le logarithme de base 2. Il utilisera dans la suite un logarithme dérivé du logarithme de base 10.
[4] A priori, n'est pas défini le logarithme d'un entier qui n'est pas une puissance entière de 2. C'est là toute la difficulté de la conception, et de la construction, d'une table.

Pas de démonstration, juste un exemple construit à partir des progressions de la définition. On voit bien cependant que le résultat est basé sur une propriété simple des puissances. On peut en effet écrire :

$128 \times 32 = 2^7 \times 2^5 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4096$ donc $\log_2 4096 = 12 = 7 + 5 = \log_2 128 + \log_2 32$.

Avec les logarithmes, tout se passe comme si l'on raisonnait uniquement sur les exposants, qu'il suffit dans ce cas d'ajouter.
Il en résulte immédiatement que le logarithme du carré d'un nombre est le double du logarithme de ce nombre, le triple pour le cube.

De la même façon, on a une propriété analogue qui concerne les divisions :

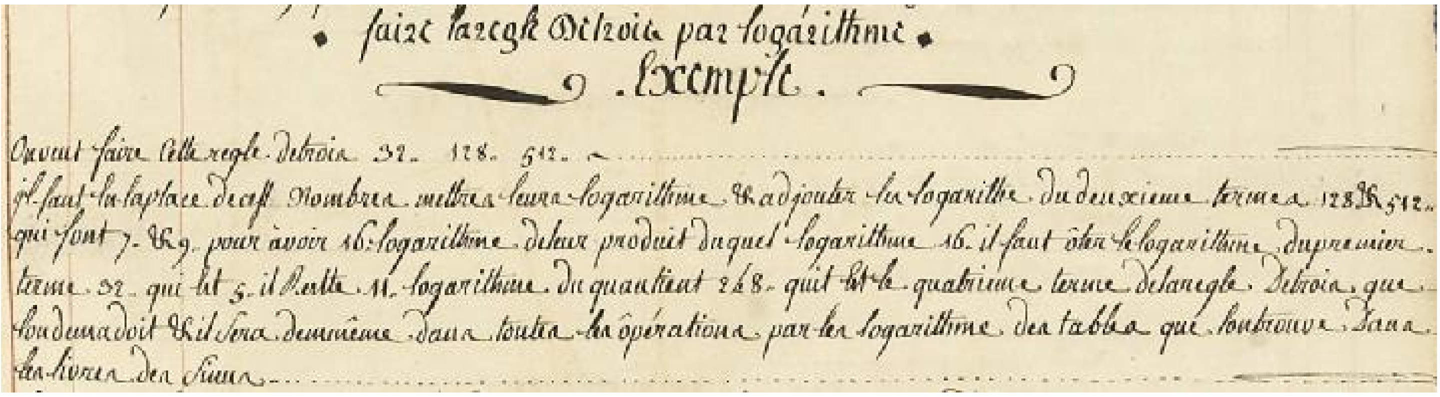


Pour diviser 2048 par 32, l'on soustrait le logarithme de 32 qui est 5 du logarithme de 2048 qui est 11 & il reste 6 pour le logarithme du quotient 64 & ainsy de tout autre nombre ; & pour tirer la racine carrée d'un nombre comme 256 l'on prend la moitié de son logarithme 8, qui est 4, logarithme de 16, racine carrée de 256. & pour tirer la racine cubique, on ne prend que le tiers du logarithme du nombre proposé ainsy pour tirer la racine cubique de 512, l'on prend le tiers de son logarithme 9, qui est 3, logarithme de 8, racine cubique de 512.

Là encore, un exemple est donné, qui montre pourquoi les divisions des nombres sont transformées en soustractions sur les exposants, donc sur les logarithmes :

$$\frac{2048}{32} = \frac{2^{11}}{2^5} = 2^{11-5} = 2^6 = 64 \text{ donc } \log_2 64 = 6 = 11 - 5 = \log_2 2048 - \log_2 32.$$

Avec ces deux propriétés fondamentales, les logarithmes vont donc permettre de traiter les règles de trois, autrement dit les recherches de quatrième proportionnelle, en remplaçant les multiplications par des additions et les divisions par des soustractions : c'est en ce sens qu'ils seront un gain appréciable de temps de calcul pour le marin.



On veut faire cette règle de trois 32 - 128 - 512
Il faut en la place de ces nombres mettre leurs logarithmes & ajouter les logarithmes du deuxième terme ***(& troisième terme)*** *128 & 512 qui sont 7 et 9 pour avoir 16 logarithme de leur produit, duquel logarithme 16 il faut oter le logarithme du premier terme 32 qui est 5, il reste 11 logarithme du quotient 2****(0)****48 qui est le quatrième terme de la règle de trois que l'on demandait & il sera de même dans toutes les opérations par les logarithmes des tables que l'on trouve dans les livres des sinus.*

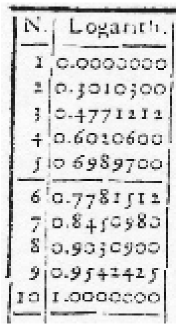
Remarquons que Denoville recopie Bouguer un peu moins scrupuleusement : quelques petits oublis, ou étourderies, sont indiquées en gras dans le texte précédent. Sans doute n'a-t-il pas eu l'occasion de se relire !
Le problème posé est donc celui de la recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est-à-dire chercher x tel que 32 soit à 128 comme 512 à x $\left(\frac{32}{128} = \frac{512}{x}\right)$. On sait que $x = \frac{128 \times 512}{32}$, produit des deux termes moyens de la proportion, divisé par le premier terme.
En passant au logarithme, et en utilisant les propriétés, on peut écrire :

$\log_2 x = \log_2 128 + \log_2 512 - \log_2 32$.

On a ajouté les logarithmes des deuxièmes et troisièmes termes de la proportion (les termes moyens), et soustrait le logarithme du premier terme : c'est la règle que propose Denoville, et qu'il utilisera dans toute la suite.

La nature des tables de logarithmes

Au demeurant, il reste à disposer d'une table de logarithme *complète* : on est restreint pour le moment aux puissances de 2. Comment faire pour calculer le logarithme de 7 par exemple ? ou de 21 ? Denoville n'en souffle mot : pourtant Bouguer donne quelques éléments[5] que notre marin dieppois ne recopie pas ! Sans doute ne maîtrise-t-il pas suffisamment la technique... ou peut-être n'avait-il plus sous la main le traité de Bouguer... Peu importe : pour un marin[6], l'important est que les tables existent.



N.	Logarith.
1	0.0000000
2	0.3010300
3	0.4771212
4	0.6020600
5	0.6989700
6	0.7781512
7	0.8450980
8	0.9030900
9	0.9542425
10	1.0000000

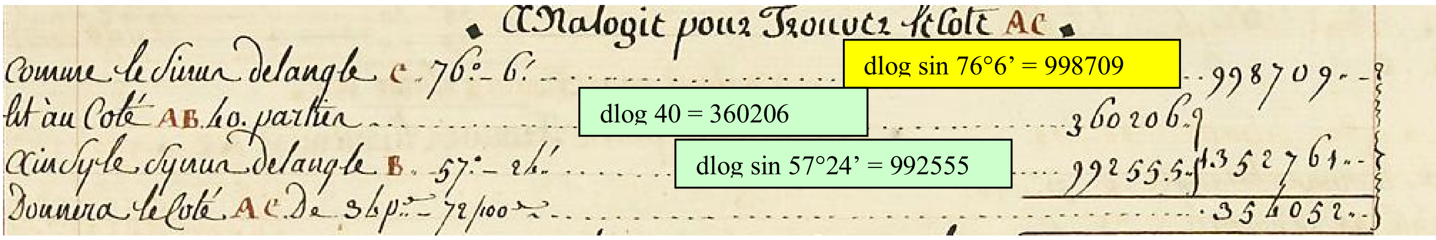
Bouguer, toujours lui, propose dans son traité une table, donnant les logarithmes de *tous* les entiers jusqu'à 10000 avec 7 décimales, dont les premiers éléments dont donnés ci-contre.
Comme log 10 = 1, on a affaire ici au logarithme de base 10^7 (un peu plus loin dans la table, on constate que log 100 = 2, log 1000 = 3, etc.)[8].
Pour appliquer commodément la loi des sinus, on dispose aussi d'une table donnant directement les logarithmes des sinus de tous les angles de 0° à 90°, de degré en degré par exemple, ainsi que les logarithmes des tangentes.
Denoville n'en dit pas plus sur les tables qu'il utilise[9]. Tout au plus peut-on les reconstituer en examinant les valeurs qui interviennent dans ses calculs[10]. En voici les permiers éléments.

Nombre	log
1	200000
2	230103
3	247712
4	260206
5	269897
6	277815
7	284510
8	290309
9	295424
10	300000
11	304139
12	307918
13	311394

Angle en degré	log sin	log tan
1	824186	824192
2	854282	854308
3	871880	871940
4	884358	884464
5	894030	894195
6	901923	902162
7	908589	908914
8	914356	914780
9	919433	919971
10	923967	924632
11	928060	928865
12	931788	932747
13	935209	936336

Les logarithmes en service

Reprenons la résolution de triangle déjà vue, en utilisant maintenant les logarithmes –ce que Denoville fait systématiquement. Comme on l'a vu plus haut, la recherche de quatrième proportionnelle, à la suite de l'application de la loi des sinus, est grandement simplifiée. Reprenons le calcul[11] de notre marin $AC = \dfrac{40 \times \mathrm{Sin}57°24'}{\mathrm{Sin}76°6'}$, qui devient dlog AC = dlog 40 + dlog 57°24' – dlog 76°6', ainsi que cela a été expliqué dans le traitement des règles de trois.
Avec la disposition usuelle des analogies (voir ci-dessous), il ne reste plus qu'à additionner les deux nombres en bleu (360206 + 992555 = 1352761) puis soustraire au résultat le nombre en jaune (1352761 – 998709 = 354052). Tous ces nombres sont obtenus par lecture dans des tables de logarithmes :



Analogie pour Trouver le Coté AC.
Comme le Sinus de langle C. 76°. 6'. 998709
Est au Coté AB 40. parties 360206
Ainsy le Sinus de langle B. 57°. 24'. .... 992555 | 1352761
Donnera le Coté AC de 34 p. 72/100 354052

Le résultat obtenu donne le logarithme du côté AC : une lecture inverse dans la table montre que AC est à peu près égal à 34 parties 72/100[e].
Bilan : 4 lectures de table, dont une lecture inverse, une addition et une soustraction. Pour qui doit répéter de tels calculs, comme les marins vont de plus en plus être poussés à le faire à partir du XVIII[e] siècle, le gain apporté par les logarithmes est prodigieux.

---

[5] Comme Jean-Baptiste, nous n'en dirons pas plus dans le cadre de cet article...
[6] Qui pense que les mathématiques ne sont pas une fin en soi mais un outil.
[7] C'est même exactemeent le logarithme décimal, noté log, que l'on utilise de nos jours.
[8] On avait dans l'exemple de Denoville $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$...
[9] Bien qu'elles soient toutes basées sur le même principe, il en existe un certain nombre, pas exactement identiques, dérivant pour la plupart du logarithme décimal. Les propriétés du logarithme sont bien sûr conservées.
[10] Au demeurant, il change aussi de table au cours des exemples qu'il traite, pour revenir à la première à la fin.
[11] Le logarithme à la mode de Denoville, légèrement différent du logarithme décimal que l'on utilise de nos jours, est noté avec un d.