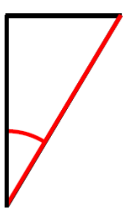
4. La résolution des triangles

Nous entrons enfin avec le paragraphe *Calcul des triangles rectilignes*[1] dans le vif du sujet : la résolution des triangles, l'objet même de la trigonométrie. Résolution sur laquelle s'appuie continuellement le marin, au prix de quelques efforts mathématiques, qu'il calcule sa route ou qu'il fasse quelques relevés de nature topographique sur une côte. S'il est parfois évasif, voire incomplet, sur certains des points abordés précédemment, Denoville va devenir très rigoureux et très pédagogique dans les exemples abordés, ne reculant pas devant la répétition. Car il s'agit bien qu'un pilote, pas spécialement « matheux », soit capable de refaire ce type de calcul... Nous disposons désormais de tous les outils théoriques qui permettent de résoudre, dans la plupart des cas[2], n'importe quel triangle, à savoir :
- les différentes lignes trigonométriques ;
- la célèbre loi des sinus pour obtenir des relations entre les éléments connus et inconnus ;
- enfin, les indispensables logarithmes pour simplifier les calculs.

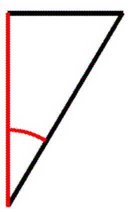
Cette « trilogie » a constitué pendant des dizaines d'années, voire des siècles, l'arsenal de base des utilisateurs de la trigonométrie, astronomes ou topographes, arpenteurs ou marins... Le *Calcul des triangles rectilignes* de Denoville se compose de deux parties : premièrement la résolution des triangles rectangles, puis, deuxièmement la résolution des triangles rectilignes non rectangles, avec la distinction entre les triangles oxigones (dont tous les angles sont aigus) et les triangles ambligones (qui possèdent un angle obtus).

Résolution des triangles rectangles

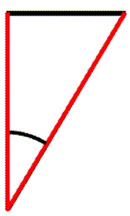
À partir des résultats précédents, la résolution des triangles rectangles ne pose aucune difficulté particulière. C'est sans doute la plus essentielle au marin, car elle permet la détermination des éléments d'une route en navigation. **PXXX** Quatre *théorèmes* [3] sont proposés, correspondant à tous les cas possibles de résolution d'un triangle rectangle[4].
Les deux éléments connus, en dehors de l'angle droit, sont précisés ci-après :



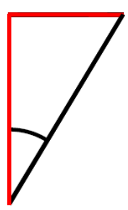
Théorème I : on connaît un angle aigu et l'hypoténuse.



Théorème II : on connaît un angle aigu et un côté de l'angle droit.



Théorème III : on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

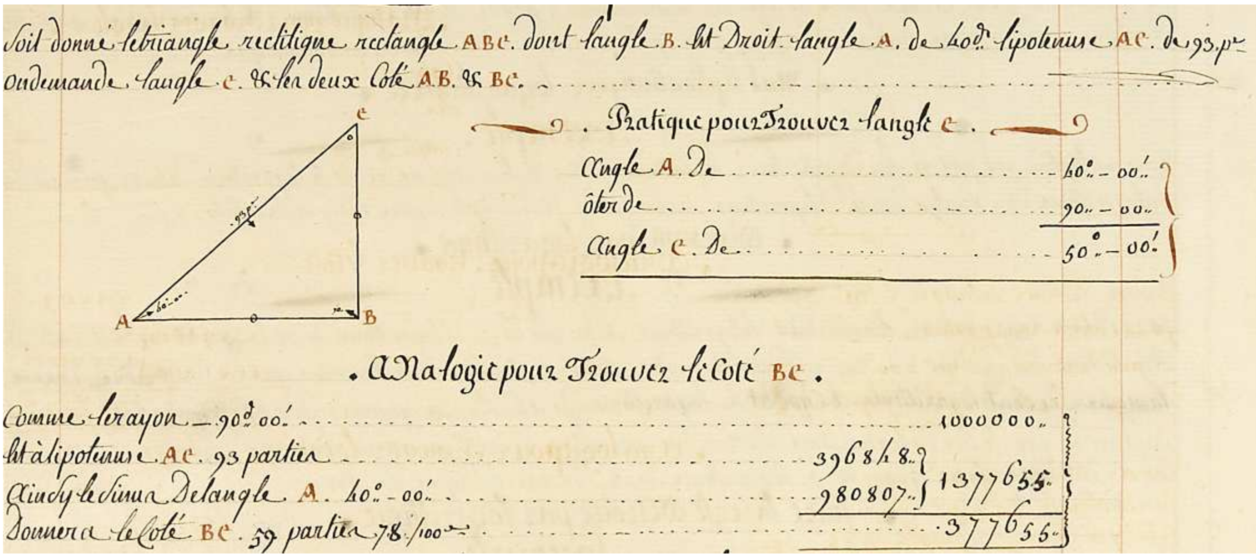


Théorème IV : on connaît deux côtés de l'angle droit.

Chaque cas est illustré par deux exemples traités en détail. Comme on l'a vu plus haut, Denoville s'appuie sur des analogies, qui conduisent à des recherches de quatrième proportionnelle[5]. Examinons le *Théorème I* qui se résout par la loi des sinus, et le *Théorème IV* pour lequel il faut faire appel à la propriété des tangentes.

[1] Par opposition aux triangles sphériques, qui relèvent de la Trigonométrie Sphérique.
[2] Quelques cas pathologiques demeurent, où la loi des sinus ne peut pas être appliquée immédiatement (par exemple trouver les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés).
[3] À ne pas prendre au sens mathématique de résultat démontré. C'est l'étymologie qui nous guide : le théorème est plus ici un objet d'étude, au sens d'un cas qu'on examine.
[4] Ils seront repris en ces termes dans le chapitre Navigation, pour la détermination des routes
[5] Les exemples de Denoville étant essentiellement constitués de calculs, et présentés systématiquement à la manière des analogies, nous n'en proposerons pas de transcription en langage moderne quand nous les aborderons. Le lecteur s'y retrouvera sans peine.

Résolution par la loi des sinus


Soit donné le triangle rectiligne rectangle ABC. dont l'angle B. est Droit. l'angle A. de 40d. l'ipotenuse AC. de 93.pe

On demande l'angle C. & les deux Coté AB. & BC. ....

. Pratique pour Trouver l'angle C .

Angle A. De	40°. – 00.'
ôter de	90.. – 00..
Angle C. De	50° – 00.'

. Analogie pour Trouver le Coté BC .

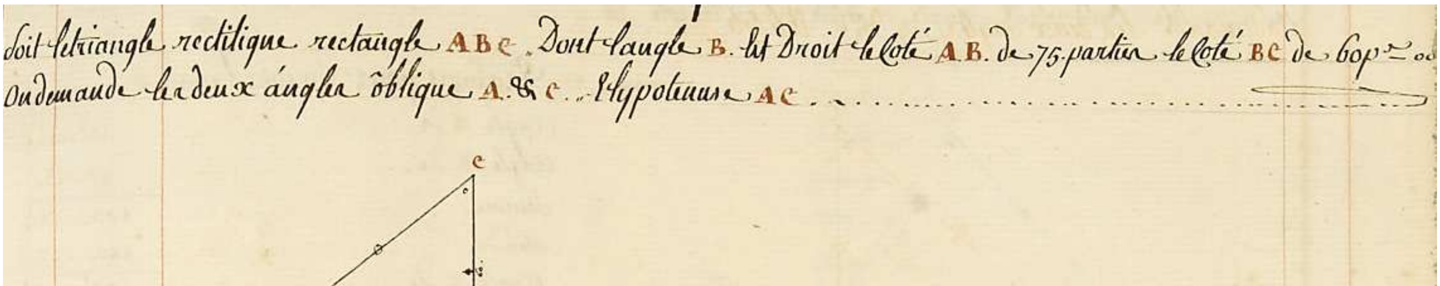
Comme le rayon — 90d. 00.'	1000000..	
Est à l'ipotenuse AC. 93 partie	396848.	1377655.
Ainsy le sinus De l'angle A. 40°. – 00.'	980807..	
Donnera le Coté BC. 59 partie 78/100	377655.	

Contrairement à ce que nous ferions de nos jours, c'est bien la loi des sinus qui est appliquée pour résoudre ce triangle rectangle :
Le sinus de l'angle droit est le sinus total, ou rayon.
L'analogie s'énonce : « le rayon, ou sinus total, est à l'hypoténuse ce que le sinus de 40° est au côté inconnu *BC.* »
En langage moderne, on dirait : $\frac{d\sin 90°}{AC} = \frac{d\sin 40°}{BC}$
La résolution se fait par les logarithmes. Les sinus invoqués par Denoville sont en fait des[6] log sin :
Comme dans l'exemple précédent, on ajoute les deux nombres moyens (396848 et 980807) et l'on soustrait au résultat obtenu le premier terme (1000000), dans une disposition qui est toujours la même.
Le résultat 377655 est le logarithme de *BC* ; une lecture inverse donne *BC* = 59 parties 78/100e.

Le calcul de *AB* est traité de manière analogue. Les détails qui concernent la consultation de table, notamment tous les problèmes d'interpolation linéaire, ne sont pas donnés. Denoville apporte quelques précisions sur ce point dans son paragraphe sur les logarithmes : nous n'en dirons pas plus dans le cadre de ce chapitre.

Tous les autres cas sont traités de la même façon. La première difficulté survient au *Théorème IV* : la loi des sinus ne donne rien. Quelque soit l'égalité, il y a toujours **deux** grandeurs inconnues –une de trop pour résoudre–, au lieu d'**une** seule. Il faut donc trouver une autre stratégie pour ce cas litigieux.

Résolution par les tangentes


Soit le triangle rectiligne rectangle ABC. Dont l'angle B. est Droit le Coté AB. de 75 partie le Coté BC de 60 p..

On demande les deux angles oblique A. & C.. l'hypotenuse AC ....

La définition 29 nous sort de l'impasse :

*Lorsqu'***un des côtés d'un triangle rectiligne rectangle est pris pour entier sinus ou rayon**, *l'autre côté est pris pour tangente de l'angle qui lui est opposé, & l'hypoténuse pour sécante du même angle ; ainsi dans le triangle ABH* où *AB est le rayon, la ligne HB est tangente de l'angle A & AH en est la sécante.*

Dans le triangle considéré, si le côté *AB* est pris pour rayon ou sinus total, *BC* est alors la tangente de l'angle $\hat{A}$. Avec une table, le rayon choisi est de 100 000 et *BC* a alors pour mesure la valeur de la tangente donnée par la table. On passe de notre figure à la situation de référence de la table par proportionnalité. On peut donc écrire l'analogie suivante, pour calculer l'angle $\hat{A}$:

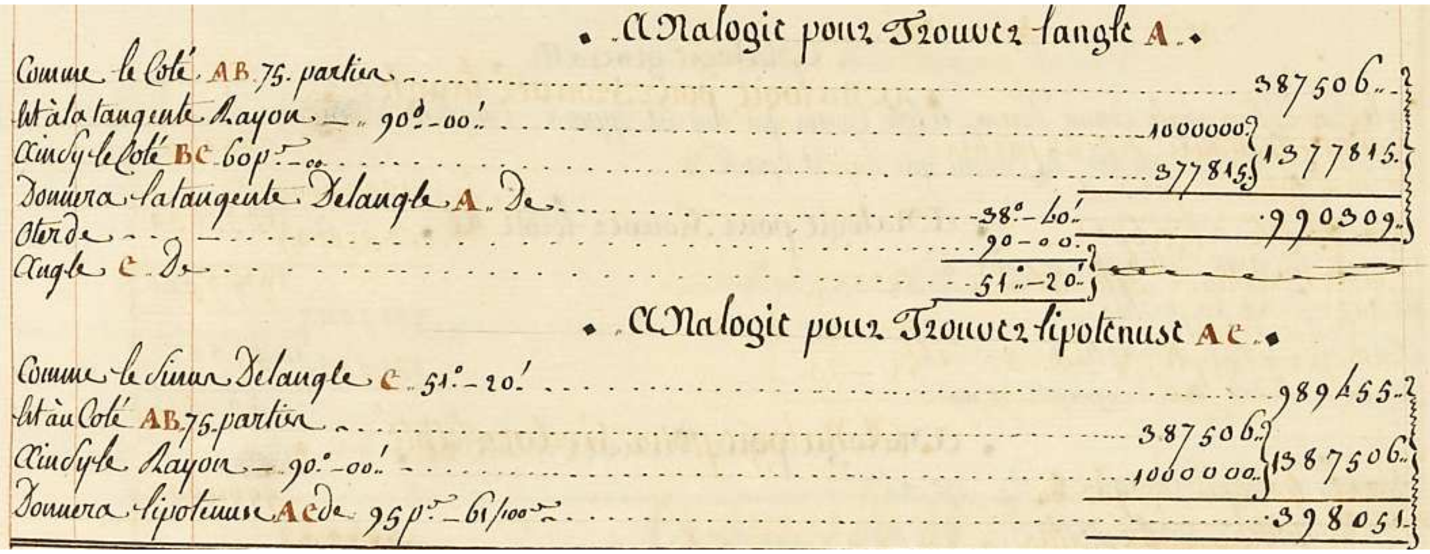
[6] La confusion est fréquemment faite à l'époque, où le sinus abdique purement et simplement devant le log sin.

le côté *AB* est au rayon comme le côté *BC* est à la tangente de l'angle $\hat{A}$, soit $\frac{AB}{R} = \frac{BC}{\mathrm{dt\,an}\,\hat{A}}$ (un seule inconnue, la tangente de l'angle $\hat{A}$, qui apparaît en quatrième place dans cette analogie).

La formule bien évidemment se traite par les logarithmes, avec une table de log tan.

dlog tan $\hat{A}$ = dlog *R* + dlog *BC* – dlog *AB*

Une lecture inverse dans la table log tan donne la valeur de l'angle $\hat{A}$.


• Analogie pour Trouver langle A •
Comme le Coté AB 75 partien ... 387506
Est à la tangente Rayon — 90°-00' ... 1000000
Ainsy le Coté BC 60p.-00 ... 377815 | 1377815
Donnera la tangente De langle A De ... 38°-40' ... 990309
Oter de ... 90-00
Angle C De ... 51°-20'
• Analogie pour Trouver lipotenuse AC •
Comme le Sinus De langle C 51°-20' ... 989455
Est au Coté AB 75 partien ... 387506
Ainsy le Rayon — 90°-00' ... 1000000 | 1387506
Donnera lipotenuse AC de 95p.-61/100 ... 398051

Le calcul de *AC*, l'autre côté de l'angle droit, peut alors se faire avec la loi des sinus.

Et le navire ennemi ?

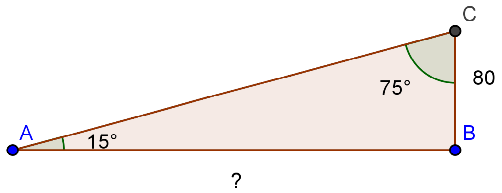
L'exemple du navire ennemi qui illustre le début de ce chapitre, s'il ne relève pas à proprement parler de la navigation, éclairera le lecteur sur la démarche à mettre en œuvre… et le type de problème que peut être amené à résoudre un marin comme Jean-Baptiste. La vigie (*C*) de la frégate française de droite (figure ci-dessous), juché sur une barre de son mât de hune, à 80 pied des flots, veut savoir à quelle distance se trouve un autre navire, battant fièrement pavillon anglais sous la brise marine (*celui de gauche*)… Navire *ennemi* donc pendant la Guerre de Sept ans, et puissamment armé… Bref le problème n'est pas si anodin qu'il y paraît de prime abord : sans doute s'agit-il d'envoyer une première salve de canon, avec un réglage de distance le plus correct possible, ou de s'échapper si l'on est plus rapide !

La distance entre les deux navires, *AB*, qui intéresse la vigie, est **inaccessible**. Mais trois éléments accessibles du triangle *ABC* sont connus : la longueur *BC*, c'est la hauteur du mât, l'angle $\hat{B}$, qui est droit[7], et l'angle $\hat{C}$ qu'une vigie habituée aux instruments de navigation pourra mesurer sans peine. À partir de ces trois éléments connus, on peut, grâce à la trigonométrie, calculer le côté *AB* du triangle *ABC*... et connaître la distance entre les deux navires… Denoville précis et méticuleux représente avec beaucoup d'exactitude la figure géométrique qui correspond à la situation.

Transcription du texte de Denoville, visible sur la figure du début du chapitre

Voyant un navire à la mer et que l'on veuille savoir à quelle distance on est de lui.

[7] Si la mer n'est pas trop agitée… où si l'on a un bon coup d'œil pour repérer la verticalité du mât au moment de faire la mesure…



Cette situation relève du *Théorème II*, et le calcul peut être fait par la loi des sinus :

$$\frac{\sin 15}{80} = \frac{\sin 75}{AB} \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{\sin 75 \times 80}{\sin 15} = 298$$

Ce calcul est fait par les logarithmes chez Denoville.

Exemple

Soit la hauteur des barres du petit mât de hune BC de 80 pieds et l'angle C de 75° 00'. On demande la distance du navire que l'on voit en A.

Pratique

	Angle C de	*75° 00'*	
	Ôter de	*90° 00*	
	Angle A de	*15° 00*	
Analogie pour trouver la distance des deux navires			
Côté AB			
Comme le sinus de l'angle A	*15°00*		*941 300*
Est à la hauteur du petit mât de hune Côté BC 80 pieds		*290 309*	
Ainsi le sinus de l'angle C	*75° 00*	*998 494*	*1 288 803*
Donnera la distance des deux navires côté AB	298 pieds		347 503

Résolution des triangles rectilignes non rectangles

Nous avons présenté un exemple de résolution de triangle non rectangle un peu plus haut **p XX** et nous ne rentrerons pas dans ces commentaires dans le détail des situations envisagées par Denoville. Précisons ici seulement le plan adopté dans le manuscrit. Denoville considère d'abord le cas des triangles **oxigones**, c'est-à-dire dont tous les angles sont aigus. Quatre *Théorèmes* sont de nouveau envisagés, recouvrant tous les cas possibles. Sont supposés connus :
- dans le *Théorème V*, un côté et deux angles ;
- dans le *Théorème VI*, deux côtés et un angle non compris entre ces côtés (avec un triangle *oxigone*) ;
- dans le *Théorème VII*, deux côtés et l'angle compris entre ces côtés ;
- enfin dans le *Théorème VIII*, les trois côtés de l'angle droit.

Là encore, la loi des sinus reste l'outil par excellence, mais des difficultés apparaissent à partir du *Théorème VII*, nécessitant quelques calculs plus techniques, et plus laborieux, ou quelques éléments géométriques supplémentaires. **S**

Enfin pour les triangles **ambligones**, c'est-à-dire des triangles ayant un angle obtus, quatre *Théorèmes* sont considérés, reprenant la même progression que pour les triangles oxigones. Sont supposés connus :
- dans le *Théorème IX*, un côté et deux angles ;
- dans le *Théorème X*, deux côtés et un angle non compris entre ces côtés ;
- dans le *Théorème XI*, deux côtés et l'angle compris entre ces côtés ;
- enfin dans le *Théorème XI*I, les trois côtés.

Des cas délicats sont à signaler, à chaque fois que la loi des sinus ne peut pas s'appliquer, cas que l'on traite comme précédemment de façon un peu plus technique. **S**