Didier Trotoux
IREM, Université de Caen Normandie
Association Sciences en Seine et Patrimoine, Rouen

# Jean-Baptiste Legrip et la navigation par l'Échelle Anglaise

Zegerscappel, 28 octobre 2020

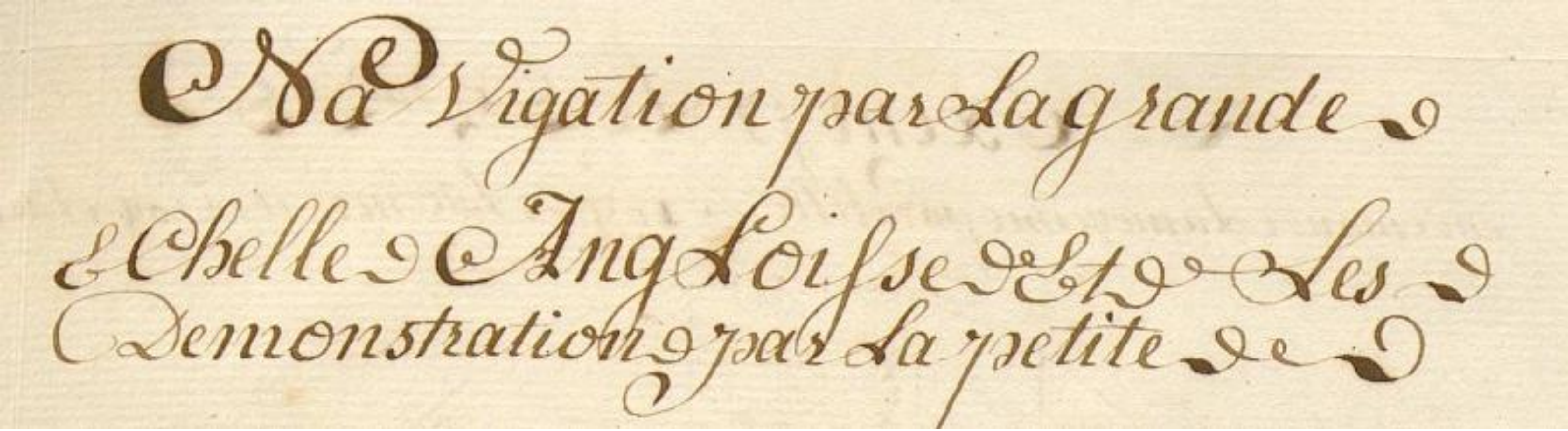
# Plan

1. L’Échelle Anglaise dans le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip (1762)

2. L’échelle et la règle de Gunter

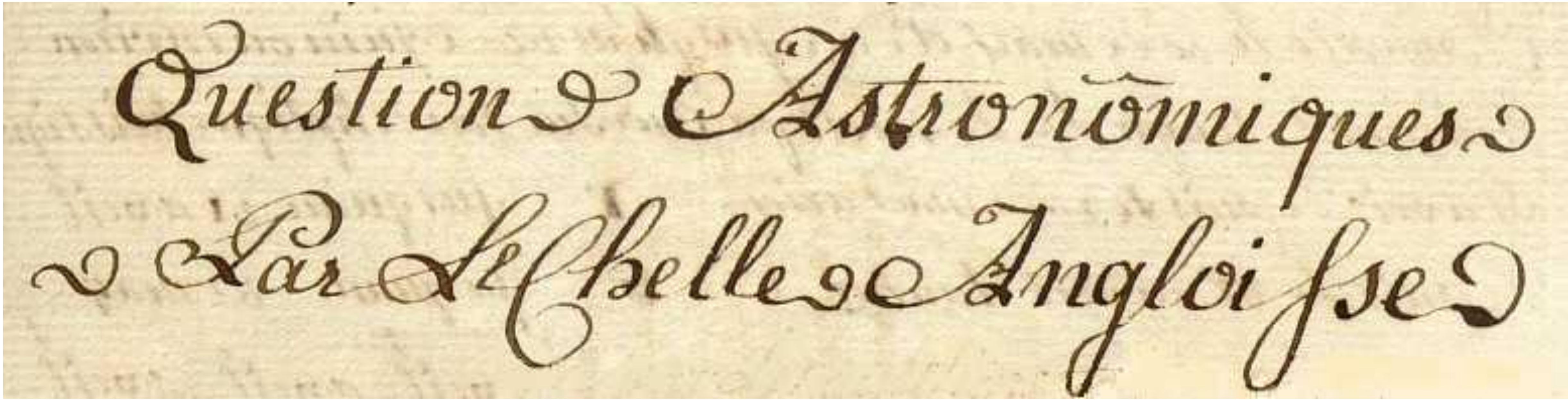
3. Utilisation de la règle de Gunter

# L’Échelle Anglaise dans le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip


Navigation par la grande
Echelle Angloisse Et les
Demonstration par la petite

La partie du manuscrit où il est question d'Échelle Anglaise occupe 76 pages, soit environ un cinquième de l'ouvrage.

La première partie (p. 191-231) traite de navigation et aborde la détermination de la moyenne parallèle entre deux latitudes données, la réduction de lieues mineures en lieues majeures, la résolution des problèmes généraux de navigation et le calcul des corrections à y apporter (trigonométrie plane).


Question Astronõmiques
Par Le Chelle Angloiſse

La deuxième partie (p. 231-266) traite des questions astronomiques, à savoir, la détermination de la déclinaison du Soleil, son ascension droite, la différence ascensionnelle, l'heure de lever et coucher du Soleil, l'azimut et l'heure d'observation (trigonométrie sphérique) .

# Mode de présentation

1. Énoncé de la proposition

2. Pratique

3. Illustration par un ou plusieurs exemples.

# Exemple 1a (page 192)

## Deuxième proposition

*Réduction des lieues mineures[6] cinglées à l'Est ou à l'Ouest en lieues majeures[7] par une latitude ou moyenne parallèle proposée.*

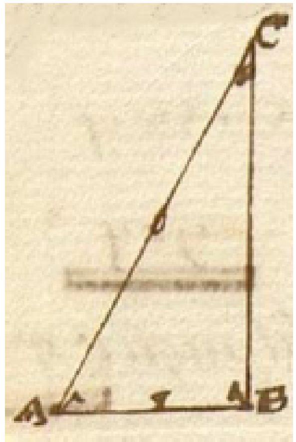
## Pratique

*Pour faire cette proposition, il faut soustraire la moyenne parallèle de 90° pour avoir son complément qui est le premier [terme] de l'analogie, les lieues de l'Est ou de l'Ouest pour le second terme et pour le troisième terme est l'entier sinus ou 90° puis il faut mettre un pied du compas à la corde du sinus SIN sur les degrés et minutes du complément de la moyenne parallèle et l'autre pied du compas à la corde des nombres NUM sur les lieues mineures qu'on a cinglé à l'Est ou à l'Ouest vers le bout d'en bas et porter cette ouverture sur l'entier sinus au point de 90° SIN et faire tomber l'autre pied du compas sur la corde des nombres NUM et le pied du compas vous marquera les lieues majeures depuis le bout d'en bas et réduire lesdites lieues majeures en donnant 20 lieues pour un degré et une lieue pour trois minutes.*
*En voici l'analogie. Comme le sinus complément de la moyenne parallèle est aux lieues mineures ainsi l'entier sinus est aux lieues majeures.*

# Exemple 1b (page 193)

## Exemple 1[er]

*On suppose avoir cinglé à l'Est 30 lieues mineures par la latitude ou moyenne parallèle de 60°. On demande combien [elles] valent de lieues majeures et de degrés de longitude.*




*Pour trouver l'angle C*

| | | |
|---|---|---|
| *Angle* | *A* | *60°* |
| *À ôter angle* | *B* | *90°* |
| *Vient l'angle* | *C* | *30°* |

*Analogie pour trouver l'hypoténuse AC qui sont les lieues majeures.*
*Comme le sinus complément de la moyenne parallèle angle C 30° est aux lieues mineures côté AB 30 lieues ainsi l'entier sinus angle B 90° est aux lieues majeures hypoténuse AC 60 lieues.*

## Réponse

*Les 30 lieues mineures valent 60 lieues majeures par la moyenne parallèle de 60°, qui valent 3° en différence de longitude Est.*

# Exemple 2a (page 202)

## Quatrième proposition ou

## Règle de distance

*La latitude et la longitude du lieu d'où l'on est parti et la latitude et la longitude du lieu où l'on veut aller étant donnés, trouver l'air de vent et le chemin qu'il faut faire pour y aller en droite route.*

## Pratique

*Pour faire cette proposition, il faut premièrement soustraire les deux latitudes l'une de l'autre pour avoir leur différence s'ils sont toutes deux du même côté mais s'ils sont de différents côtés, il les faut ajouter ensemble et le tout sera leur différence qu'il faut réduire en lieues. Il faut ainsi soustraire les deux longitudes pour avoir leur différence s'ils sont toutes deux occidentales et, l'autre, mais s'ils sont de différents côtés c'est-à-dire l'une orientale et l'autre occidentale ou bien l'une occidentale et l'autre orientale alors il faut les ajouter ensemble pour avoir leur différence laquelle [il] faut réduire en lieues qui seront appelées lieues majeures qu'il faut réduire en lieues mineures par la moyenne parallèle comme il est enseigné ci-devant.*

# Exemple 2b (page 203)

## Pratique pour trouver l'air de vent

*Il faut mettre un pied du compas sur les lieues provenues de la différence en latitude et l'autre pied du compas sur les lieues mineures le tout sur la corde des nombres et le compas ainsi ouvert porter un pied du compas sur la corde des tangentes au point de 45° et faisant tomber l'autre pied sur la même corde des tangentes et la marque où il tombera vous marquera les degrés et minutes de la valeur de l'air de vent, à savoir si les lieues provenues de la différence en latitude sont plus fortes que les lieues mineures, vous commencerez à compter au bout d'en bas de l'échelle jusqu'à la pointe du compas et ce sera les degrés et minutes de la valeur de l'air de vent qu'il faut faire pour aller au lieu proposé.*
*Mais si les lieues mineures sont plus fortes que les lieues provenues de la différence en latitude, il faut commencer à compter au point de 45° et puis dire 45°, 50° et 55° plus ou moins c'est-à-dire jusqu'à que vous soyez rendu à la pointe de votre compas qui vous donnera aussi les degrés et minutes de la valeur de l'air de vent qu'il faut faire en droite route.*

# Exemple 2c (page 203)

## Pratique pour trouver le chemin

*Il faut mettre un pied du compas sur la corde des nombres sur les lieues de la différence en latitude et faire tomber l'autre pied sur la corde du sinus sur les degrés et minutes du complément de l'air de vent et de cette ouverture porter un pied du compas à la corde du sinus au point de 90° et faire tomber l'autre pied sur la corde des nombres qui vous marquera les lieues du chemin en droite route à compter depuis le bout d'en bas ou bien autrement il faudra mettre un pied du compas sur les lieues mineures à la corde des nombres et faire tomber l'autre pied sur la corde du sinus sur les degrés et minutes de la valeur de l'air de vent et de cette ouverture porter un pied du compas à l'entier sinus 90° et faire tomber l'autre pied sur la corde des nombres vous marquera aussi le chemin commence à compter du bout d'en bas.*

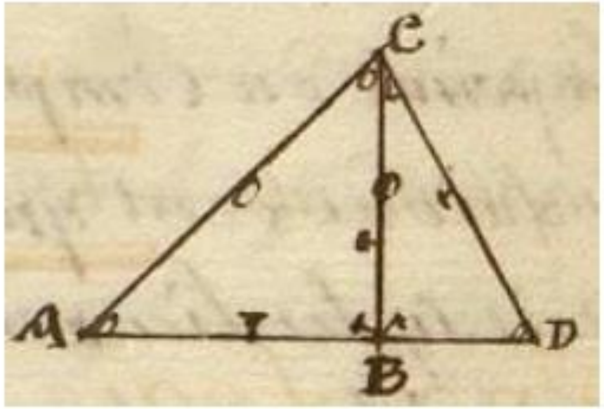
# Exemple 2d (page 204)

## Exemple 1er

*L'on suppose parti de 30° 30' de latitude Nord et de 48° 48' de longitude orientale et on veut aller par les 32° 24' de latitude aussi Nord et par les 50° 54' de même longitude. L'on demande l'air de vent et le chemin qu'il faut faire pour y arriver au lieu proposé.*

| | |
|---|---|
| *Latitude partie Nord* | *30° 30'* |
| *Latitude arrivée Nord* | *32° 24'* |
| *Différence en latitude Nord* | *1° 54'* |
| *Somme des latitudes* | *62° 54'* |
| *Moyenne parallèle* | *31° 27'* |
| *À ôter de* | *90°* |
| *Complément* | *58° 33'* |

| | |
|---|---|
| *Longitude partie Est* | *48° 48'* |
| *Longitude arrivée Est* | *50° 54'* |
| *Différence en longitude Est* | *2° 06'* |
| *Lieues majeures* | *42 ℒ* |
| *Lieues mineures* | *35 ℒ 45'* |



# Exemple 2e (page 204)

Analogie *pour trouver les lieues mineures côté BC.*
*Comme l'entier sinus angle B 90° est aux lieues majeures hypoténuse DC 42 lieues, ainsi le sinus complément du moyen parallèle angle D 58° 33' est aux lieues mineures côté BC 35 lieues 45'.*

Analogie *pour trouver la valeur de l'air de vent angle A.*
*Comme les lieues de différence [en] latitude côté AB 38 ℒ est à la tangente angle B 45° ainsi les lieues mineures côté BC 35 ℒ 45' est à*

| | |
|---|---|
| *la tangente valeur de l'air de vent angle A* | *43° 15'.* |
| *À ôter de l'angle B* | *90°* |
| *Complément de l'air de vent angle C* | *46° 45'.* |

Analogie *pour trouver le chemin hypoténuse AC.*
*Comme le sinus complément de l'air de vent angle C 46° 45' est au lieues de différence [en] latitude côté AB 38 lieues ainsi l'entier sinus angle B 90° est au chemin hypoténuse AC 52 lieues.*

## Réponse

*L'air de vent qu'il faut faire pour aller au lieu proposé est le NE 1°45' plus Nord sur lequel il faut cingler 52 lieues de chemin en droite route pour y arriver au lieu proposé.*

# L’échelle et la règle de Gunter

Dans le *Cayez de navigation*, il n’y a aucun schéma représentant l’Échelle Anglaise et les seules indications fournies par J.-B. Legrip figurent au tout-début de la première proposition, page 191 :

*En premier lieu il faut savoir les cordes de l’échelle qui est composée de cinq cordes dont la première à la main droite est la corde des huit rumbs de vent où est marqué $S_R$ qui veut dire sinus des rumbs de vent. La deuxième corde est la corde des nombres marquée NUM ou la corde des lieues. La troisième corde est la corde de sinus ou de 90° marquée SIN. La quatrième corde de la tangente où est marqué 45°, marquée TAN ou la prendre aussi pour 90°. La cinquième corde est la corde des méridiennaux qui sert à trouver la moyenne parallèle marquée MER.*

Legrip emploie le terme « corde » dans le sens d’échelle ou graduation (*scale* en anglais).

Ce qu’il ne précise pas, c’est que les quatre première échelles sont des échelles logarithmiques (logarithmes des sinus des rumbs de vent, logarithmes des nombres, logarithmes des sinus et logarithmes des tangentes).

La cinquième échelle est construite à partir d’une table des parties méridionales, qui mesuraient les parties de méridien en fonction de leur degré de latitude.

Dans le *Nouveau traité de navigation* de Pierre Bouguer publié en 1753, nous trouvons un chapitre (Livre V, Section II, Chap. III) intitulé, *Méthode de résoudre les Problèmes de Navigation par l'Echelle des Logarithmes, nommée vulgairement Échelle Anglaise*.

## *Conſtruction des Echelles des Logarithmes.*

207. On met ordinairement trois de ces échelles l'une au-deſſus de l'autre ; on les fait exactement de même longueur, & on les rend paralleles. La premiere exprime par ſes diviſions les Logarithmes des nombres abſolus ; c'eſt ſur cette échelle qu'on prend le nombre des lieues de diſtance ou des milles de la marche du Navire, & toutes les autres meſures dont on ſe ſert pour déterminer la longueur des côtés des triangles-rectilignes. Au-deſſous de cette échelle on en met une autre qui eſt formée des Logarithmes-Sinus, de degré en degré juſqu'à 90; & plus bas on met la troiſiéme échelle qui contient les Logarithmes-Tangentes juſqu'à 45 degrez. On ne prolonge pas celle-ci plus loin, afin qu'elle ſoit de même longueur que celle des Sinus ; & quant à la premiere ou celle des nombres abſolus, on ſe contente de la marquer juſqu'à 100.

Après avoir expliqué comment on construit ces échelles à partir des tables de logarithmes, Bouguer indique comment on les utilise :

## *Uſage de l'Echelle des Logarithmes pour réſoudre les Problêmes de Navigation.*

214. Lorſqu'on ſe ſert des logarithmes pour faire une Regle de Trois ou proportion, on met préciſément la même différence entre les logarithmes des deux derniers termes, qu'entre les logarithmes des deux premiers. Il faut faire la même choſe lorſqu'on travaille ſur l'échelle des logarithmes, & l'opération eſt extrêmement aiſée. On ouvre un Compas commun depuis le premier terme juſqu'au ſecond, on le porte enſuite ſur le troiſiéme terme, & l'autre pointe du Compas marque le quatriéme terme. Il faut ſeulement avoir ſoin d'éviter les analogies dans leſquelles les ſécantes ſont employées, & faire auſſi en ſorte que les tangentes dont on ſe ſert, appartiennent à des angles moindres que 45 degrez.

# Pourquoi cette dénomination d'Échelle Anglaise ?

Trois mathématiciens anglais ont joué un rôle majeur dans l'histoire de cette Échelle Anglaise :

- John Napier (1550-1617), le premier à publier le concept de logarithmes et les tables correspondantes dans le *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614.
- Henry Briggs (1556-1630), calculateur et auteur de la première table logarithmique à base décimale *Arithmetica Logarithmica* en 1617.
- Edmund Gunter (1581-1626), inventeur de la méthode des échelles logarithmiques.

C'est le nom de ce dernier qui passera à la postérité grâce à cette invention des échelles et puis des règles dites de Gunter ou tout simplement Gunters.

# Edmund Gunter (1581-1626)

Peu après la mort de Napier, Briggs avait publié en 1617 sa première table de logarithmes décimaux, de 1 à 1000. Mais il n’avait publié que les logarithmes des nombres et pas ceux des fonctions trigonométriques comme l’avait fait Napier.

Par conséquent, une formule comme la règle des sinus : $\frac{X}{\sin(x)} = \frac{Y}{\sin(y)}$, qui est l’une des opérations les plus utiles en navigation ne pouvait pas être calculée directement avec les tables de Napier, ni avec les tables de Briggs.

Gunter était un savant polymathe. Il était actif dans les domaines de la théologie, de l'arpentage, de l'astronomie, la navigation, la conception des cadrans solaires, et même la dépendance dans le temps de la variation du champ magnétique terrestre. Il était, de plus, un fervent partisan du système décimal.

En 1619, il obtint un poste d’astronome au Gresham College sur la recommandation de Briggs avec qui il avait eu des échanges sur les logarithmes et avec lequel il était devenu ami. Le Gresham College organisait des conférences publiques et débats en langue anglaise et Gunter avait reçu de nombreux commentaires de capitaines de navire et autres navigateurs dans son auditoire.

# Edmund Gunter (1581-1626)

Il s'était rendu compte que les calculs de navigation tireraient bénéfice à la fois des logarithmes des nombres et de ceux des fonctions trigonométriques. En 1619, il publia la première table combinée, le « *Canon Triangulorum* », contenant ses propres logarithmes décimaux des sinus et des tangentes nouvellement calculés, mais il ajouta également les logarithmes des nombres de Briggs.

Désormais, la règle des sinus pouvait enfin être calculée par les logarithmes des tables d'un seul livre.

Gunter a poursuivi ensuite ses recherches estimant que certains problèmes de navigation nécessitaient une solution plus simple et plus rapide que ne le permettait le calcul par tables. Cela l'a conduit à concevoir un nouveau type d'échelle où les nombres étaient représentés par des distances d'échelle logarithmique où un compas à pointes sèches était utilisé pour ajouter et soustraire ces distances dans le domaine logarithmique.

# Edmund Gunter (1581-1626)

Gunter, en fait, a proposé trois types d’échelles logarithmiques, non seulement la ligne des nombres, mais aussi les échelles logarithmiques des sinus et des tangentes  afin que la règle des sinus puisse être calculée entre ces échelles. Il a également laissé entendre que l’ajout d’une échelle des sinus verses pourrait faciliter le calcul des côtés d’un triangle sphérique.

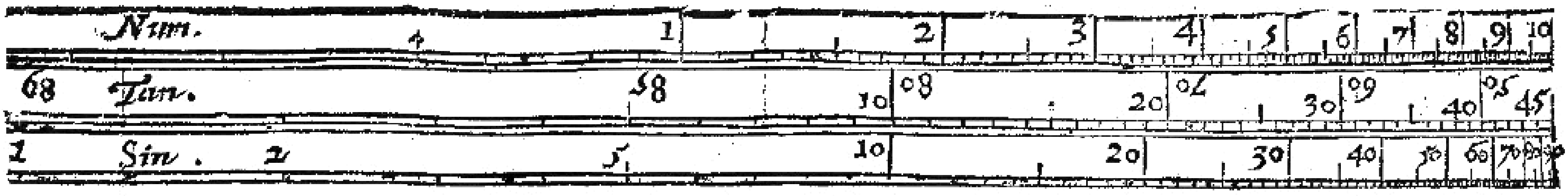
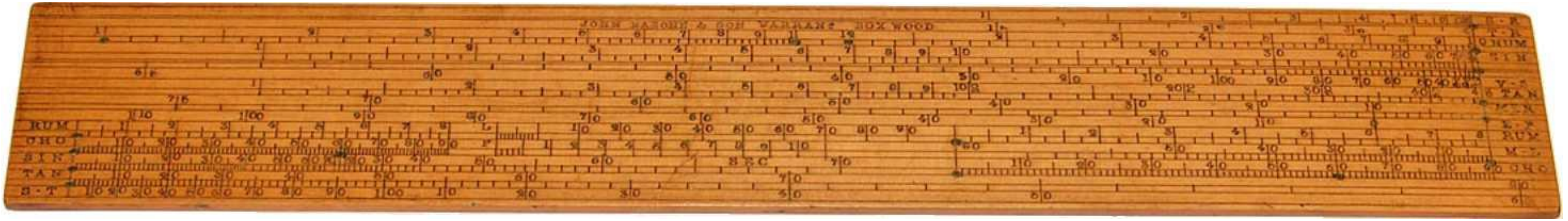



Image originale des échelles de Gunter

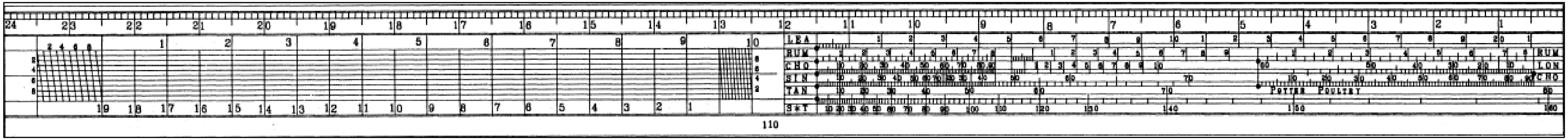
# Les règles de Gunter

Les publications de Gunter furent republiées à de nombreuses reprises après sa mort et le fait qu'il ne soit pas fait mention de l'utilisation des trois échelles sur une règle droite, dans l'édition de 1673 de ses œuvres complètes, peut laisser à penser que la règle de Gunter est apparue à la fin du XVII$^{e}$ s. voire au début du XVIII$^{e}$ siècle.

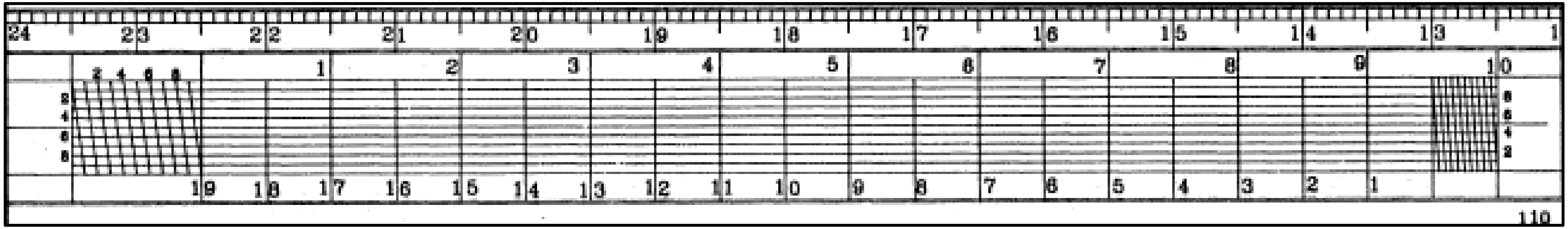
La règle de Gunter standard est le plus souvent en bois, mais parfois en laiton et des exemplaires d'un pied de long en ivoire ont été recensés. La majorité des règles de Gunter connues ne portent ni nom de fabricant ni date de fabrication. Bien sûr, on rencontre des variations, comme les échelles avec des abréviations de noms différentes, des échelles étendues mais aussi des tailles différentes. La plupart des règles de Gunter mesurent deux pieds de long sur 2 pouces ou 1 pouce et demi de large (soit environ 610 x 50 mm). Il existe des modèles d'un pied, avec les mêmes échelles que la règle de Gunter standard réduites dans cette plus petite taille.



# La règle de Gunter de deux pieds : recto



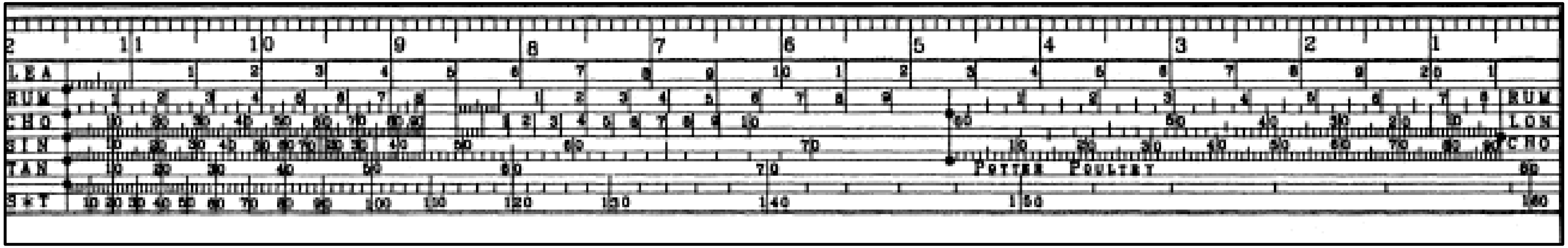

## Échelles linéaires




| Nom abrégé de l'échelle | Nom complet | Signification |
|---|---|---|
| | Échelle diagonale sur la partie gauche | Pour prendre les longueurs exactes avec le compas en centièmes de pouces et demi-pouces. |
| | Pouces | Échelle de mesure de 24 pouces le long du bord supérieur de la règle. |
| **L E A** | Lieues | Échelle linéaire pour construire des tracés de distances nautiques.<br>1 lieue (anglaise) = 3 milles marins. |
| **L** et **P** | Parties égales pour lire les fonctions des autres échelles | P (rayon 2 pouces) pour lire RUM, CHO, SIN, TAN, S*T et MER ;<br>L (rayon 3 pouces) pour le plus long RUM & CHO à l'extrême droite. |

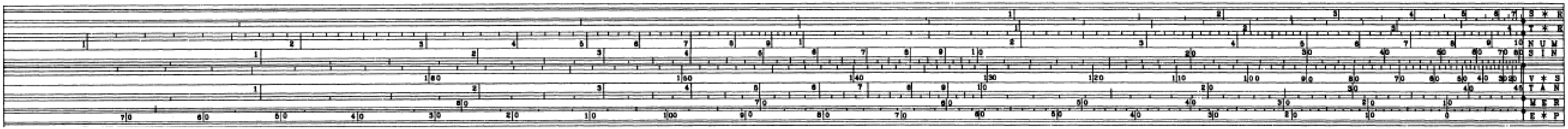
# La règle de Gunter de deux pieds : recto

## Échelles trigonométriques

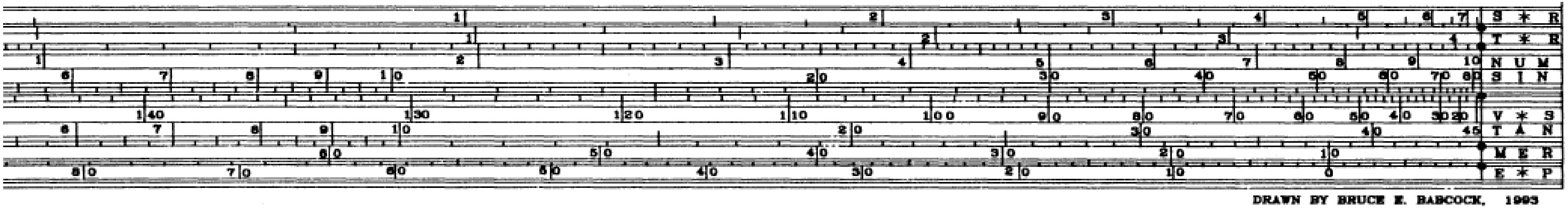


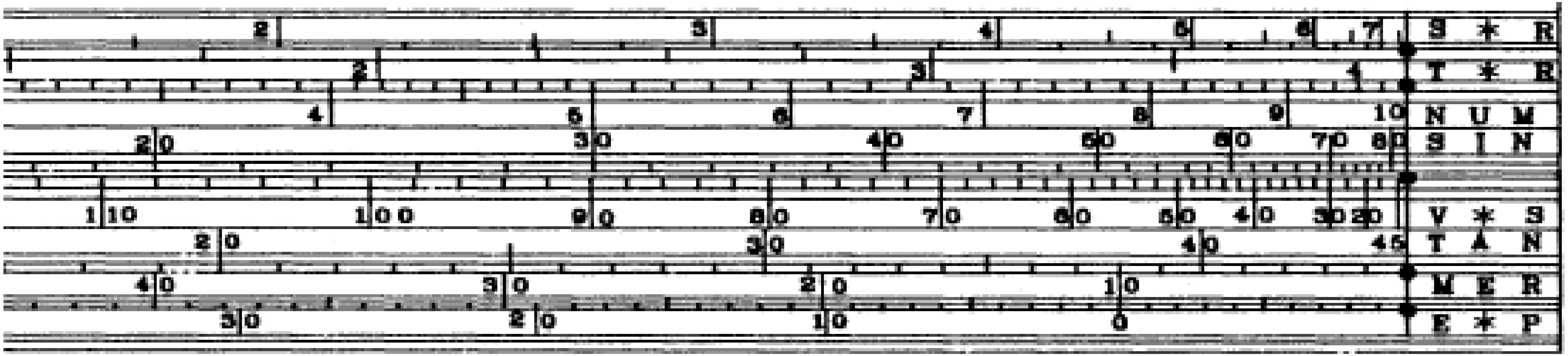

| Nom abrégé de l'échelle | Nom complet | Signification | Formule |
|---|---|---|---|
| **R U M** | Cordes des rumbs | La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les « points » du compas (32 en 360°) | $2\ sin(5{,}625\ X)$ |
| **C H O** | Cordes des degrés | La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les degrés | $2\ sin(X/2)$ |
| **S I N** | Sinus des degrés | Sinus de l'angle | $sin\ (X)$ |
| **S E C** | Sécante des degrés | Sécante de l'angle | $sec(X)$ |
| **T A N** | Tangente des degrés | Tangente de l'angle | $tan(X)$ |
| **S * T** | Semi-Tangente des degrés | Tangente du demi-angle | $tan(X/2)$ |
| **L O N** ou **M * L** | Milles de longitude | Longueur d'un degré à la latitude X | 60 $cos(X)$ à combiner avec l'échelle CHO située dessous |

# La règle de Gunter de deux pieds : verso



Échelles artificielles ou logarithmiques






| Nom abrégé de l'échelle | Nom complet | Signification | Formule |
|---|---|---|---|
| **S * R** | (Artificielle) Sinus des rumbs | *log sin* des « points » du compas | *log sin*(11,25 *X*) |
| **T * R** | (Artificielle) Tangentes des rumbs | *log tan* des « points » du compas | *log tan*(11,25 *X*) |
| **N U M** | (Artificielle) Ligne des nombres | Échelle logarithmique à deux cycles | *log* (*X*) |
| **S I N** | (Artificielle) Sinus des degrés | *log sin* des degrés (de 0° à 90°) | *log sin*(*X*) |
| **V * S** | (Artificielle) Sinus verses des degrés | *log versin* des degrés (de 0° à 180°) | *log* (1 – *sin*²(*X*/2)) |
| **T A N** | (Artificielle) Tangentes des degrés | *log tan* des degrés (de 0° à 45°) | *log tan*(*X*) |
| **M E R** | Ligne Méridionale | Accroissement du degré de latitude sur un méridien de la carte de Mercator | ∫ *sec*(*X*) d*X* à combiner avec E * P |
| **E * P** | Parties Egales | Échelle linéaire | *X* |

# Utilisation de la règle de Gunter

Soit donnée l'analogie $A\colon B :: C\colon D$ avec $A$, $B$ et $C$ connus. Comment obtenir $D$ ?

Nous avons $A \cdot D = B \cdot C$ d'où $D = \frac{B \cdot C}{A}$

En utilisant les logarithmes, il vient alors $\log(D) = \log(B) + \log(C) - \log(A)$.

Avec un crayon et du papier, nous le résoudrions de cette manière.

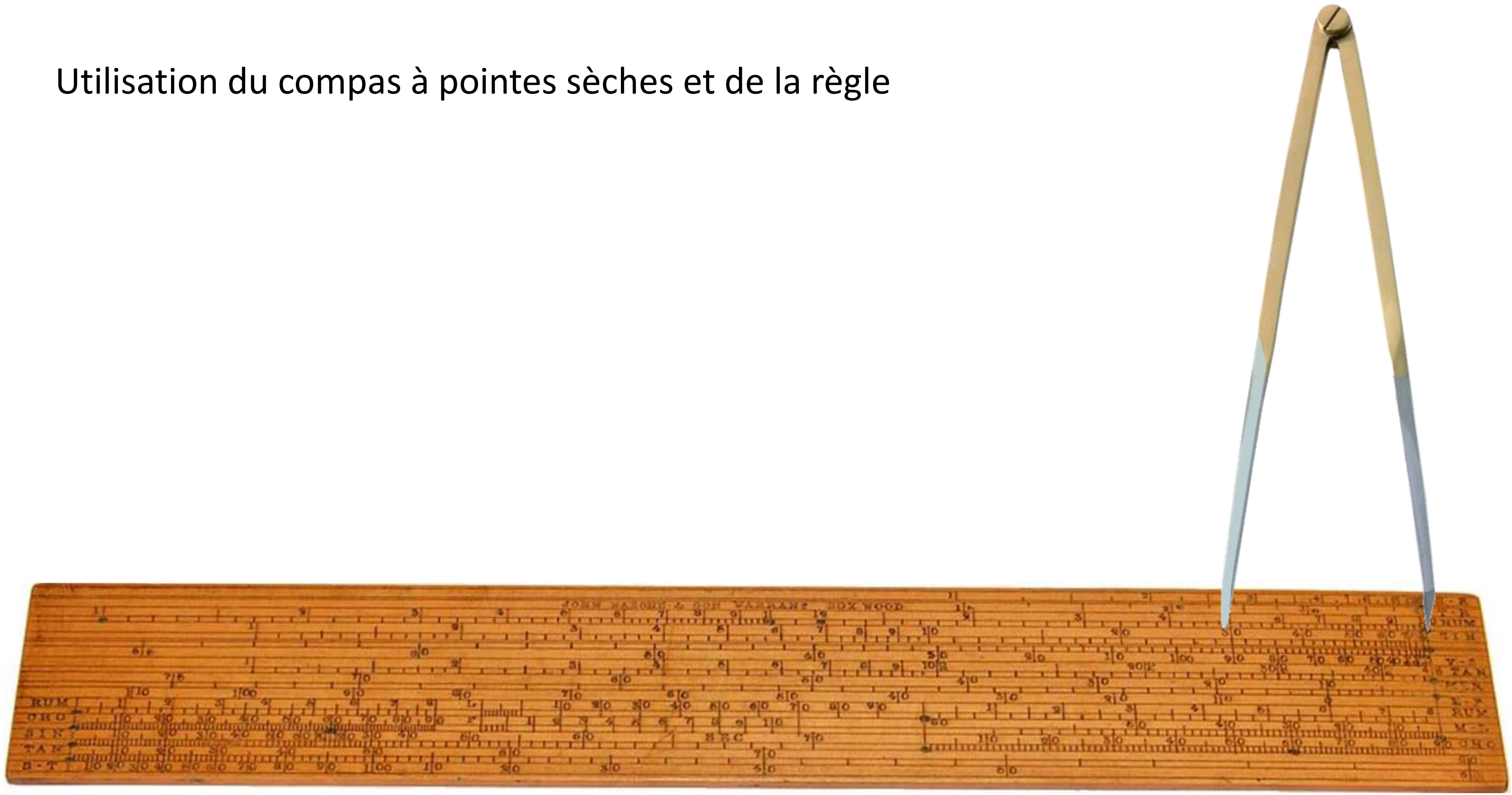
Mais, avec un compas à pointes sèches mesurant la distance entre des points sur l'échelle, il est plus naturel de le voir comme $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

D'où $\log(A) - \log(B) = \log(C) - \log(D)$.

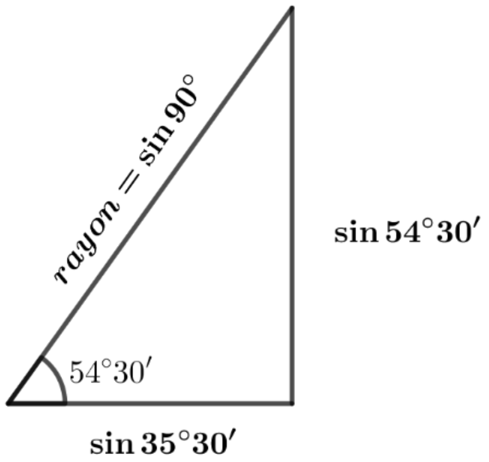
Le compas à pointes sèches nous donne la distance entre $\log(A)$ et $\log(B)$ et si nous déplaçons le compas de sorte qu'un des ses pieds soit placé en $\log(C)$ , l'autre pied sera en $\log(D)$. En outre, l'échelle est graduée avec $D$ en ce point, sa position englobant le logarithme.

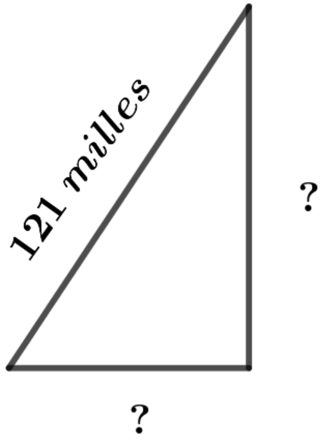
Nous lisons $D$ directement, sans avoir besoin de trouver le logarithme inverse.

Utilisation du compas à pointes sèches et de la règle

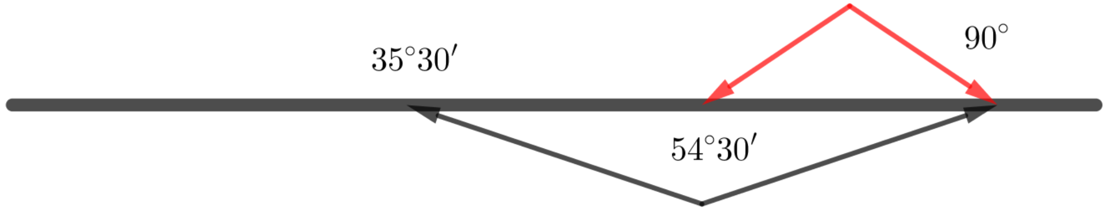


# Exemple d’utilisation pour déterminer des distances

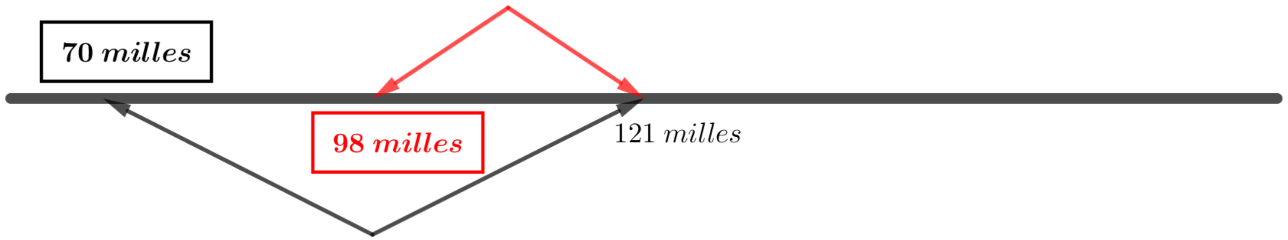


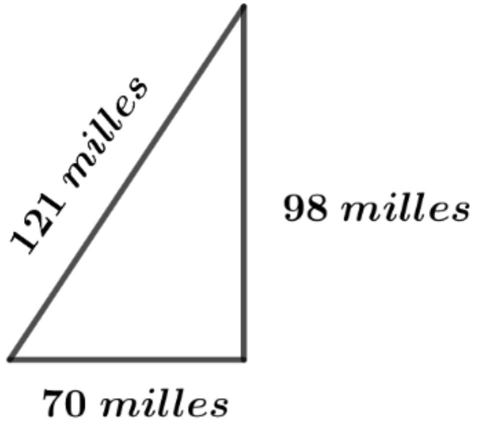




La ligne des **sinus** : une échelle des logarithmes des sinus.

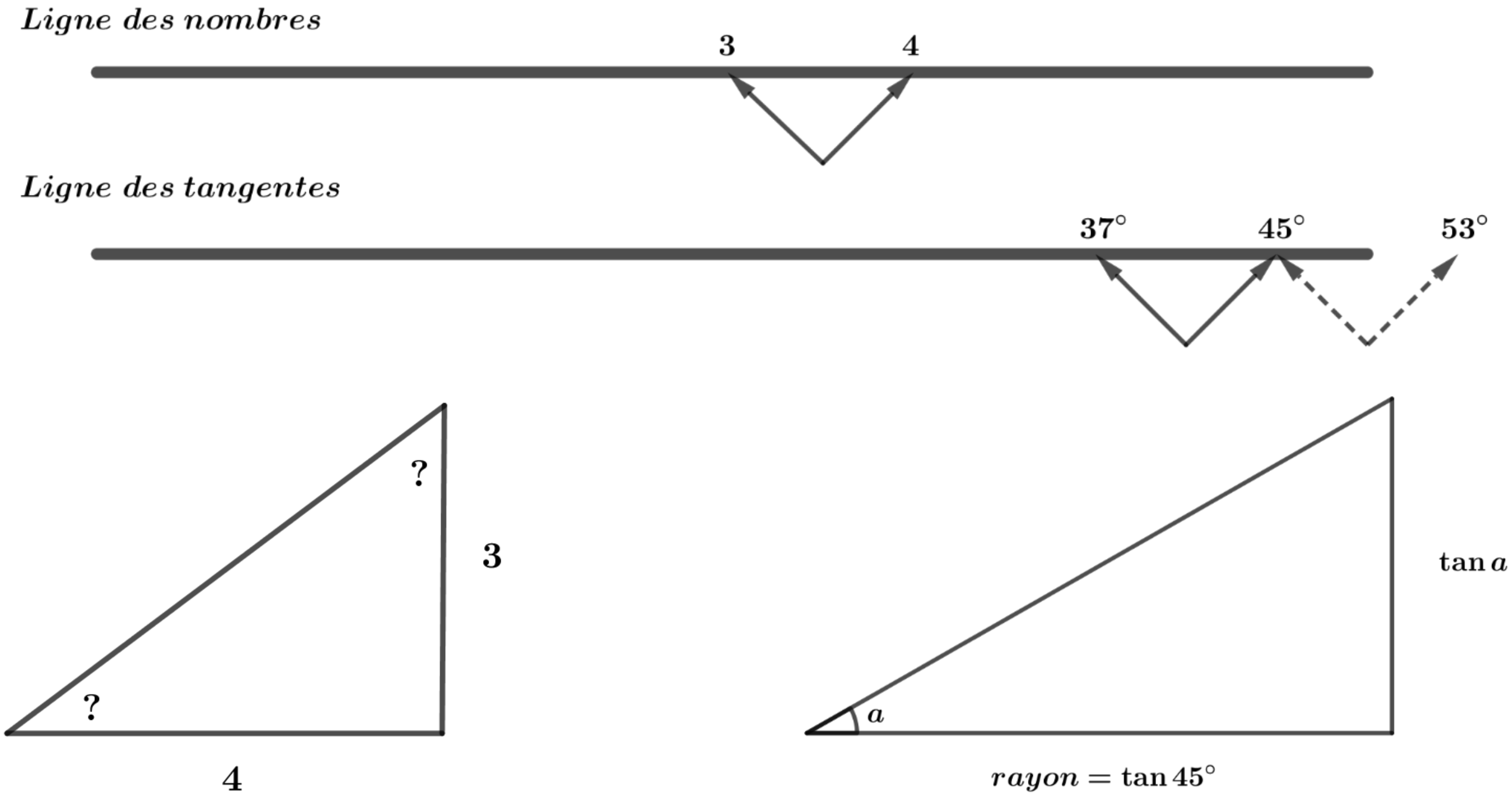



La ligne des **nombres** : une échelle des logarithmes.

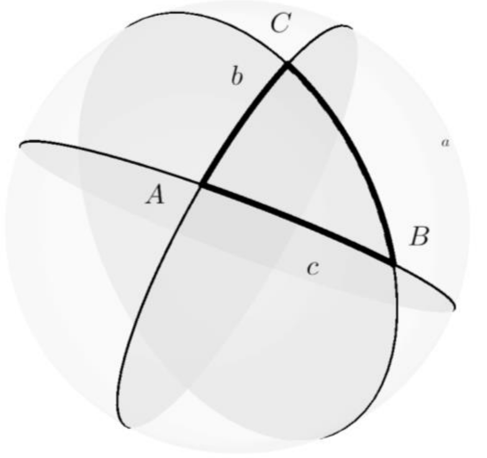


# Exemple d'utilisation pour déterminer des angles



La loi des sinus de la trigonométrie sphérique (qui s'applique aussi bien au triangles rectangles qu'aux triangles obliques) s'écrit : $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b}$ où $A$ et $B$ sont les angles aux sommets du triangle et $a$ et $b$, les segments des grands cercles qui leur sont opposés (c'est-à-dire les côtés du triangle). Les angles et les côtés sont mesurés en degrés.
Exprimés sous forme de proportions, cela peut être vu au choix comme :
$\sin(A) : \sin(a) :: \sin(B) : \sin(b)$ ou $\sin(A) : \sin(B) :: \sin(a) : \sin(b)$.




Les règles utilisées pour la résolution des triangles sphériques possédant un ou plusieurs angles droits, expriment des proportions qui relient le rapport des sinus à l'un ou l'autre des autres rapports de sinus ou des proportions qui relient les rapports des sinus aux rapports des tangentes.
Ainsi, les mêmes procédures fonctionneront, en utilisant une paire de distances sur la ligne des sinus et une autre sur la ligne des tangentes.
Pour les triangles sphériques obliques où un SAS, SSS ou AAA(*) est impliqué, la situation est plus compliquée et l'utilisation de la ligne des sinus verses peut être envisagée.

(*) S pour side (côté), A pour angle qui sont supposés connus.

# Bibliographie


- Otto Van Poelje, Gunter Rules in Navigation, *Journal of the Oughtred Society*, Vol. 13, N° 1, Spring 2004, p. 11-22.
- Edmund Stone, *The construction and principal uses of mathematical instruments* translated from the French of M. Bion, chief instrument-maker to the French king, to which are added, the constructions and uses of such instruments as are omitted by M. Bion ; particularly of those invented or improved by the English, London, 1723.
- Pierre Bouguer, *Nouveau traité de navigation contenant la théorie et la pratique du pilotage*, Paris, 1753.
- Joel Silverberg, *The Plain and Gunter's Scales – Seventeenth Century Additions to the Toolbox of Students and Practitioners of the Mathematicks*, MAA/AMS Joint Mathematical Meetings, Baltimore, 01/2014.