Construction de tables trigométriques

La trigonométrie, en tant qu'elle se préoccupe de la résolution des triangles –comme son étymologie d'ailleurs le laisse supposer– est une science aussi ancienne que la géométrie. Mais la première véritable pratique trigonométrique, au sens *moderne* du terme, avec notamment la *construction* et l'*utilisation* de tables, est due à Hipparque, un des plus grands astronomes de l'Antiquité(II^e siècle avant Jésus-Christ). La trigonométrie, dès son origine, revendique sa filiation astronomique : avant qu'elle ne vole de ses propres ailes mathématiques, de nombreux siècles devront encore s'écouler.

Malheureusement, les douze livres du *Traité des cordes* d'Hipparque, sans doute un traité majeur si l'on s'en tient à son ampleur, ont été perdus. Seuls nous restent quelques témoignages indirects, dont celui de Ptolémée, ou Théon de Smyrne.

Nous en savons suffisamment pour dire que la première table de trigonométrie de l'histoire est une table de... *cordes*, non de sinus – mais les deux notions sont proches –, dans un cercle de rayon... 3436[1] (et pas 1), les valeurs étant tabulées de 7°30' à 180° par pas de 3°45'...

C'est bien là l'acte de naissance de la résolution des triangles avec des outils de nature trigonométrique, même si l'on est encore bien loin du cercle trigonométrique de nos manuels scolaires.

L'idée va faire son chemin, d'autant qu'elle permet aux astronomes de mener à bien leurs calculs. Ptolémée, au II^e siècle de notre ère, lorsqu'il écrit sa très célèbre *Syntaxe mathématique*, ressentira le besoin d'une mise au point « trigonométrique » dans les chapitre IX, *Évaluation des droites inscrites dans le cercle,* et XI, *Préliminaires pour les démonstrations sphériques,* du livre I de son très gros ouvrage. S'il revendique clairement l'héritage d'Hipparque, il apporte aussi des modifications importantes, qui seront souvent reprises par ses successeurs. Il abandonne le rayon « exotique[2] » d'Hipparque, pour adopter la valeur 60 plus propice aux calculs sexagésimaux. Non seulement il donne une table de cordes[3] *de demi-degré en demi-degré* de 0° à 180° (travail calculatoire énorme !), mais il explique aussi comment une telle table peut être fabriquée. Le support théorique est essentiellement géométrique, basé sur les *Eléments* d'Euclide. Ptolémée s'appuie sur trois ingrédients fondamentaux, que l'on retrouvera dans tous les traités postérieurs :

la connaissance de quelques cordes particulières, grâce aux propriétés des polygones réguliers ;

la démonstration d'une formule d'addition ou de soustraction des cordes, grande innovation calculatoire qui lui permet de construire sa table de proche en proche, basée sur le célèbre théorème dit de Ptolémée ;

un théorème donnant la corde de l'arc moitié.

À partir de ces présupposés, la technique est relativement simple, mais elle donne lieu pour le moins à des calculs fastidieux et répétitifs. La corde de 72° est connue, celle de 60° aussi[4], : par différence, on connaît la corde de 12°, puis par division par 2, celle de 6°, 3°, 1°30', 0°45'...

On rate évidemment, de peu, la fatidique corde de 1°... Fâcheux pour la table que l'on veut construire... À partir des cordes de 1°30' et 0°45', Ptolémée en propose un encadrement satisfaisant, dont il déduit une valeur approchée d'assez bonne qualité. Suffisante en tout cas pour construire sa table...

---

[1] Un choix non pas du au hasard, mais lié à une valeur approchée de π...

[2] Mais pertinent, car il permettait de mesurer les arcs et les longueurs de segment avec la même unité... comme pour le radian !

[3] Elle est annexée au chapitre IX de la *Syntaxe mathématique*.

[4] Est-il besoin de rappeler que c'est la longueur du côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 60 ?

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.								
ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. de Di'm.	Prim.	Secon	Part.	Prim	Secon.	Tierc
45	30	46	24	19	0	0	57	54
46	0	46	53	16	0	0	57	47
46	30	47	22	9	0	0	57	41
47	0	47	51	0	0	0	57	34
47	30	48	19	47	0	0	57	27
48	0	48	48	30	0	0	57	21
48	30	49	17	11	0	0	57	14
49	0	49	45	48	0	0	57	7
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Un extrait de la table des cordes de Ptolémée

Le traité de Ptolémée, l'*Almageste* des arabes, le *traité le plus grand*, a eu une diffusion exceptionnelle, que beaucoup de livres lui envierait, s'étendant sur plus de mille ans. Les idées astronomiques de Ptolémée, mais aussi ses idées trigonométriques, vont cheminer longtemps...

Les Indiens d'Inde, à partir du cinquième siècle de notre ère, reprennent l'héritage grec – plutôt celui d'Hipparque d'ailleurs,car le rayon qu'ils choisissent est 3436 – pour développer à leur tour une astronomie savante. On doit à ces savants du début de notre ère une invention décisive pour la trigonométrie, celle du sinus, promise à l'avenir que l'on sait. Un « obscur » mathématicien du IV^e siècle, dont le nom a été oublié par les hasards de la postérité, a eu l'idée, simple et géniale tout à la fois, de travailler non plus avec des cordes, comme les grecs, mais avec des demi-cordes : notre sinus venait de naître...

Des tables de *demi-cordes*, ou de *sinus* donc, ou parfois de *différence de sinus*, furent alors diffusées, et selon la tradition indienne, elles devaient être apprises par coeur[5]. Celle qui suit date de la fin du V^e siècle de notre ère : elle est tirée du célèbre *Aryabhatiya* du mathématicien Aryabhatha.

Ce sont les différences de sinus, depuis 3°45' jusqu'à 90°, par pas de 3°45', soit 24 valeurs, calculée avec un rayon de 3436 : au sinus près, c'est probablement une table très proche de celles qu'Hipparque a construites. Ainsi le sinus de 3°45' est 225, celui de 7°30' est 225 + 224 = 449 etc.

On a peu de traces, chez les Indiens, des procédés théoriques qui permettaient la construction des tables. Ils sont pour la plupart d'inspiration géométrique, comme chez les Grecs ; mais des procédés calculatoires parfois très perfectionnés et très performant, s'apparentant à des développements en séries, étaient aussi parfois utilisés.

Les arabes, au carrefour des grandes civilisations de l'Antiquité, reprennent la trigonométrie de Ptolémée (avec un rayon de 60), mais intègrent les sinus. Ils font faire des progrès considérables à la trigonométrie, introduisant autour de l'an mil, toutes les lignes trigonométriques que l'on utilise habituellement.

Dans la construction des tables, se pose toujours, comme à l'époque de Ptolémée, le problème de la détermination du sinus de 1° : enjeu dont on comprend qu'il conditionne la précision de la table. Diverses méthodes sont proposées, plus précises que celles de Ptolémée. L'apport le plus original en la matière fut celui d'Al-Kashi, mathématicien iranien de la première moitié du XV^e siècle, dans son traité *Epître de la corde et du sinus* (*Risalat al-watar wa-l-jayb*) écrit en 1400. De la relation $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$, il en déduit que sin 1° est la solution de l'équation du troisième degré $\sin 3° = 3x - 4x^3$ (sin 3° pouvant être calculé de façon très précise à partir de valeurs connues par des divisions successives d'angles par 2). Il choisit de résoudre cette équation par une méthode d'approximations successives, une des premières de

[5] Il est plus simple d'apprendre par coeur les différences de sinus, que les sinus eux-mêmes !

l’histoire des mathématiques : partant d’une valeur approchée grossière de sin 1°, il l’affine en neuf étapes jusqu’à une valeur précise à 8 positions sexagésimales. Il obtient

$$\sin 1° = 1;2,49,43,11,14,44,16,26,17 = 1+\frac{2}{60}+\frac{49}{60^2}+...$$

valeur d’une très grande exactitude qui a dû servir à constituer une table très précise... Mais le traité lui aussi a été perdu, et on n’en a plus que le témoignage dans des ouvrages postérieurs, où la brillante méthode est reprise et décrite.

La trigonométrie continue son chemin et elle circule à partir du XIII^e siècle du monde arabo-mulsulman vers l’Europe latine. Une des toutes premières figures de la trigonométrie européenne est Johann Muller, dit Regiomontanus (1436-1476), qui publie un grand traité de trigonométrie, *Des triangles de toutes sortes*, qui pour la première fois sans doute, n’est pas une partie d’un manuel d’astronomie, mais un livre de mathématiques à part entière. La trigonométrie, vieille de plus de mille ans, commence un chemin autonome. Regiomontanus publie vers 1464 des tables trigonométriques, d’abord avec un rayon de 6 000 000, héritage de l’ancien système sexagésimal, puis de 10^7.

G. m.	30 Sinus	portio unius 1 10	31 Sinus	portio unius 1 10	32 Sinus	portio unius 1 10	33 Sinus	portio unius 1 10	34 Sinus	portio unius 1 10
0	3000000	25 1	3090229	24 9	3179515	24 7	3267834	24 4	3355158	24 1
1	3001511		3091725		3180995		3269297		3356604	
2	3003021		3093221		3182475		3270760		3358050	
3	3004533		3094716		3183954		3272223		3359496	

Rayon 6 000 000 (voir la valeur du sinus de 30°)

G. m.	30 Sinus	portio unius 1 10	31 Sinus	portio unius 1 10	32 Sinus	portio unius 1 10	33 Sinus	portio unius 1 10	34 Sinus	portio unius 1 10
0	5000000	42 0	5150381	41 0	5299192	41 1	5446390	40 7	5591929	40 2
1	5002519		5152874		5301659		5448829		5594340	
2	5005038		5155367	41 5	5304125		5451268	40 6	5596751	
3	5007556		5157859		5306591		5453707		5599161	

Rayon 10 000 000 (voir la valeur du sinus de 30°)

C’est ce même Régiomontanus à qui se réfère Simon Stévin (1548-1620) – c’est dire l’influence importante qu’il a eu bien après sa mort – dans son traité publié à Leyde en 1608, à la demande du prince Maurice de Nassau. Son deuxième volume traite de la cosmographie et en particulier donne une méthode de construction d’une table des sinus. Les siècles ont passé, mais les ingrédients de Ptolémée, sans doute aussi d’Hipparque dans une certaine mesure, sont toujours présents.

Une première étape donne les sinus des angles de 0° à 90° de 45’ en 45’. Trois formules sont nécessaires : le sinus de l’angle moitié, le sinus du complémentaire et la corde de la différence de deux angles (qui permettra d’obtenir le sinus de la moitié de cette différence). À partir de sin 90° = 10^9 (c’est le très grand rayon utilisé par Stevin), par passage à l’angle moitié et au complémentaire, il calcule le sinus de 8 angles. Il poursuit à partir de la connaissance de quelques sinus particuliers, tirés de l’étude du pentagone régulier (sin 36°) et de l’hexagone régulier (sin 30°), et la réitération de processus de passage à l’angle moitié et au complémentaire, lui permettent d’obtenir le sinus de 48 nouveaux angles. Enfin l’utilisation de la formule de soustraction lui permettra d’obtenir les 64 sinus restant.

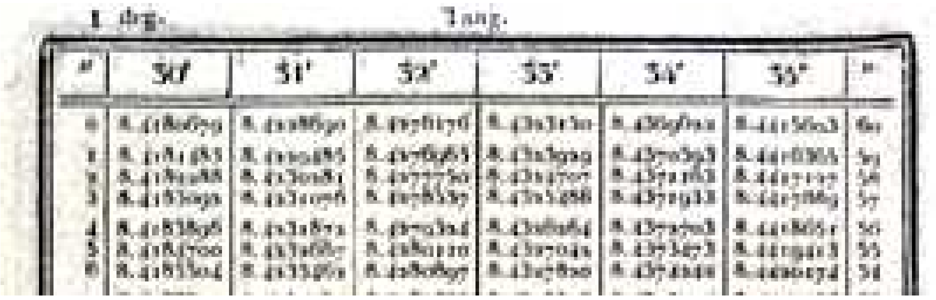
Arcs.	Sinus.	Arcs.	Sinus.
0. 45.	13089622.	45. 45.	716301925.
1. 30.	26176948.	46. 30.	725371372.
2. 15.	39259815.	47. 15.	734322510.
3. 0.	52335957.	48. 0.	743144825.
3. 45.	65403128.	48. 45.	751839807.
4. 30.	78459097.	49. 30.	760405965.
5. 15.	91501618.	50. 15.	768841832.
6. 0.	104528563.	51. 0	777145962.

La table des sinus des angles de Stévin, de 0° à 45° de 45’ en 45’

Une deuxième étape donne les sinus des angles 0° à 90° de 15’ en 15’. Devant la somme de calculs à faire, Stévin passe d’un rayon 10^9 à 10^7. Cette étape, comme à l’époque de Ptolémée, suppose la détermination de sin 1°, pour laquelle Stévin donne un encadrement. Il prend alors comme valeur la moyenne des extrêmes de cet encadrement : sin 1° = 174 524

Il peut ainsi terminer sa table en réitérant son processus de passage à l’angle moitié et au complémentaire. Il affine, par interpolation linéaire, pour avoir une table de 5’ en 5’ puis de 1’ en 1’.

L’invention des logarithmes par Neper en 1614 permet de réduire certains calculs fastidieux. Les tables de trigonométrie vont donc intégrer ce nouvel outil. Adrian Vlacq (1600-1667) publie une table des sinus, tangentes et sécantes et de logarithmes des sinus et tangentes. Il travaille avec un rayon de 10^{10}. Dans les tables qui suivent, comme celles de Jean-François Callet (1744 ; 1798), seuls les logarithmes des sinus et tangentes subsistent.


1 deg. Tang.

"	30'	31'	32'	33'	34'	35'	"

On trouve dans les *élémens de trigonométrie* de Lefébure de Fourcy (1836) une explication de la construction de ces tables qui donne les logarithmes des sinus des angles compris entre 0 et 45°, de 10’’ en 10’’. Lefébure de Fourcy complète ses explications avec la détermination des logarithmes des cosinus et travaille avec un rayon[6] 1.

Le problème du calcul de sin 10’’ est posé. Un encadrement du sinus est réalisé et l’approximation de sin 10’’ correspond au décimal qui a les 13 décimales communes aux deux extrêmes. Pour obtenir les valeurs suivantes, une formule d’addition pourrait suffire mais nécessiterait deux multiplications ; ce qui est trop coûteux en temps. L’utilisation conjointe des formules d’addition et de soustraction va permettre de passer à une multiplication et d’obtenir relativement rapidement les valeurs suivantes de proche en proche.

Les tables, pourtant essentielles pendant de longs siècles, ont définitivement disparu du paysage trigonométrique de notre époque. On pourrait croire que leurs procédés de construction, inaugurés par Ptolémée, ont été remisés aux oubliettes des bonnes idées mathématiques. Il n’en est rien : car il faut bien que les calculatrices donnent les valeurs des sinus par exemple, pour toute valeur de l’angle... Les anciennes méthodes, dépoussiérées et adaptées au spécificités des processeurs et aux contraintes technologiques, sont toujours là, derrière les boutons sin ou cos du clavier des calculatrices. C’est l’algorithme CORDIC, inventé dans les années 50 du XX^{e} siècle par Jack Volder, qui est utilisé : algorithme basé comme chez Ptolémée sur la banale formule d’addition des sinus... Un algorithme si performant qu’il a été étendu au calcul de quasiment toutes les fonctions de la calculatrice... Qui aurait pu soupçonner autant de trésors mathématiques derrière une aussi banale formule que $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos b$?

Christian Vassard & Sylvie Colesse

IREM de Rouen, ASSP

Bibliographie

On trouve sur internet la plupart des oeuvres citées dans cet article, en particulier sur les sites suivants :

- http://ww.scienceandsociety.co.uk
- http://polib.poleuniv-lille-npdc.fr
- http://gallica.bnf.fr

Claude PTOLÉMÉE, *La syntaxe mathématique*, traduit par M Halma, Paris, 1813.

[6] Déjà recommandé par Euler en 1748 dans son introduction à l’analyse infinitésimale...

S. STEVIN, *Les œuvres mathématiques de Simon Stevin de Brugges, le tout revu, corrigé et augmenté par A. Girard.* Bonaventure et Abraham Elsevier (Leyde, 1634).

J. DUPUIS, *Tables de logarithmes à sept décimales d'après Bremiker, Callet, Véga, etc*. Librairie Hachette (Paris, 1880).

LEFEBURE DE FOURCY, *Elemens de Trigonométrie : contenant la trigonométrie rectiligne, la trigonométrie sphérique et quelques applications à l'algèbre.* Bachelier, libraire de l'école polytechnique (Paris, 1836).

J .A. SERRET*, Traité de trigonométrie.* Gauthier-Villars, imprimeur-libraire de l'école polytechnique (Paris, 1880).

E BARBIN et alii, *Histoire d'algorithmes*, Belin, Paris, 1994.

A YOUSCHKEVITCH, *Les mathématiques arabes,* VRIN, Paris, 1976.

David POUVREAU-SÉJOURNÉ, *Trigonométrie et « développements en séries » en Inde médiévale*, IREM de Toulouse, 2003.