

1) Utilisation comme une règle à calcul trigonométrique

• Trigonométrie sur l'astrolabe quadrant

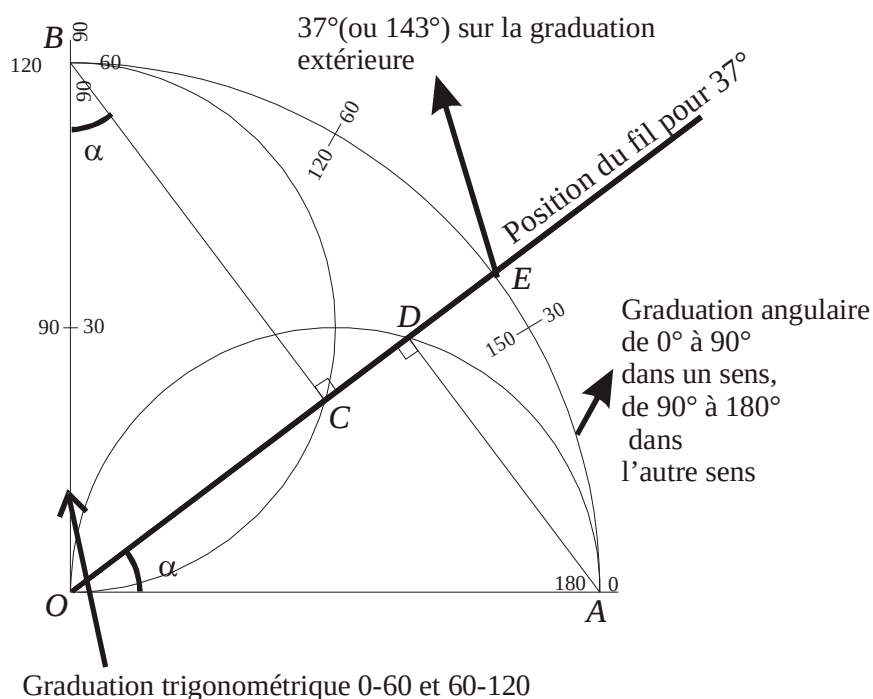


Figure 15 Trigonométrie sur l'astrolabe quadrant

L'astrolabe quadrant est une sorte de règle à calcul trigonométrique, constituée des trois parties suivantes (fig.15) :

- une graduation angulaire sur le pourtour de l'instrument (avec une double chiffraison de 0° à 90° et de 90° à 180° dans l'autre sens), permettant de repérer l'angle choisi avec le fil (sur la figure 15, on a marqué avec le fil un angle aigu de 37° ou obtus de 143°) ;

- une graduation trigonométrique sur le côté de l'instrument (avec une double chiffraison de 0 à 60 dans un sens et 60 à 120 dans l'autre sens) ;

- deux demi-cercles, l'un de diamètre [OA] pour la lecture des cosinus, l'autre de diamètre [OB] pour la lecture des sinus, comme nous le verrons juste après.

Considérons d'abord le cas d'un angle aigu α de 37° (fig. 15) : on commence par le reporter sur l'astrolabe avec le fil (angle $\widehat{AOD}$ de la figure, égal aussi à $\widehat{OBC}$, car ces angles sont l'un et l'autre complémentaires du même angle $\widehat{BOC}$).

Deux perles couissent sur le fil : on en place une en D, à l'intersection du fil et du demi-cercle de diamètre [OA], l'autre en C, là où le fil coupe le demi-cercle de diamètre [OB].

En se plaçant dans le triangle rectangle BOC, il est immédiat que :

$$\sin \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{60}$$

En faisant tourner le fil à plomb jusqu'à l'échelle trigonométrique (RTA, de 0 à 60), on peut donc lire le sinus de l'angle α : approximativement 36, c'est-à-dire 36/60.¹

De la même façon, dans le triangle rectangle DAO, on a :

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{OD}{60}$$

¹ Dans la terminologie ancienne, on dirait que le sinus (droit) est de 36, avec un sinus total, correspondant en quelque sorte au rayon du cercle trigonométrique, de 60.

La longueur OD repérée par une des perles visualise le cosinus, en n'oubliant pas le dénominateur 60. Après lecture sur l'échelle trigonométrique, on obtient approximativement un cosinus égal à 48, soit $48/60^2$.

Par ailleurs, on sait que :

$\text{sinus verse } \alpha = 1 - \cos \alpha = 1 - 48/60 = (60 - 48)/60 = 12/60$,
qui est aussi représenté par la longueur DE , en divisant comme d'habitude par 60.³

Considérons maintenant le cas d'un angle obtus : on amène le fil sur la valeur de l'angle, en lisant cette fois sur la graduation de 90° à 180° . Le dessin précédent (fig. 15) correspondrait à un angle de 143° . On sait que le sinus est le même (représenté par OC).

Que devient le sinus verse ? Utilisons le langage moderne pour comprendre ce qui se passe...

$$\text{sinus verse } 143^\circ = 1 - \cos 143^\circ = 1 + \cos 37^\circ = (60 + 48)/60$$

Concrètement, on prend la longueur OD , qui représente le cosinus de 37° , mais on lit cette fois sur l'échelle trigonométrique VSA (de 60 à 120), ce qui donne :

$$\text{sinus verse } 143^\circ = 108/60.$$

² Le cosinus, à l'époque le sinus du complémentaire, est égal à 48 avec un sinus total de 60.

³ Le sinus verse, ligne trigonométrique tombée de nos jours en désuétude, était alors égale à la différence entre le sinus total et le cosinus.