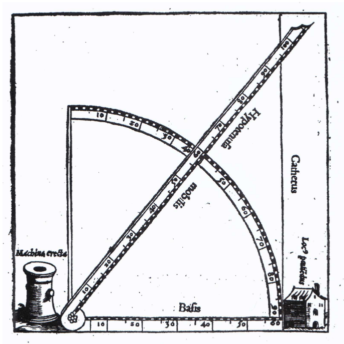
De l’usage du carré géométrique et du pasimètre

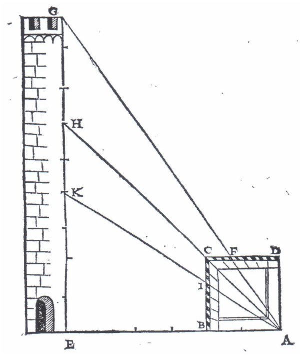
Problèmes de tours

dans le *Premier traicté de la mathématique* (BnF. fr 19064)

Le *Premier traicté de la mathématique,* sans douté réalisé à la fin du XVIe siècle, ne comporte aucune illustration. Il s’agit d’un travail réalisé dans des conditions rudimentaires et les classiques problèmes de tours, qui font l’objet de cette étude, n’y sont nullement illustrés. Si le carré géométrique ici employé est bien connu au XVIe siècle, en l’absence d’iconographie, nous nous trouvons amenés à émettre une hypothèse concernant l’autre instrument utilisé pour la géométrie pratique dans ce traité, le pasimètre. Nous n’avons retrouvé cette dénomination nulle part et supposons que ce nom composé lui a été donné au fait que cet instrument mesure des distances exprimées en pas (ou en sa moitié le pied).



Le supposé pasimètre
ou la « machina » de Munster[1], 1551



Le carré Géométrique
chez Oronce Fine[2], 1556

Conformément au texte de ce manuscrit, l’instrument doit comporter une alidade et des graduations en degrés, une base et une hypoténuse. Ce pourrait être la « machina » de Sébastian Munster, néanmoins le plomb mentionné au folio 14r ne semble pas mentionné chez cet auteur.

La hauteur de la tour s’obtient avec ce pasimètre, en réalisant une figure semblable au réel. Cette démarche est celle qui prévaut pour de nombreux instruments de topographie capables de donner accès, tout à la fois, aux angles et aux longueurs[3]. Le gonomètre utilisé par Le Vasseur, pour ne citer que lui, reproduit l’angle avec ses deux branches, et de ce fait l’explicitation de sa mesure en degrés n’est pas nécessaire.

L’usage du pasimètre est fort simple, aucun calcul n’est nécessaire puisqu’il s’agit de simples reports. La graduation ne sert qu’à permettre la conservation de l’ouverture de l’angle. La seule petite difficulté réside dans l’usage de deux unités simultanément, le pied, et son double, le pas. Les choses deviennent plus délicates avec l’usage du carré géométrique.

1 Machine à mesurer les pas, utilisée par le cosmographe allemand S. Munster (1488-1552) à des fins militaires dans son *Rudimenta Mathématica, 1551, fol. 30*

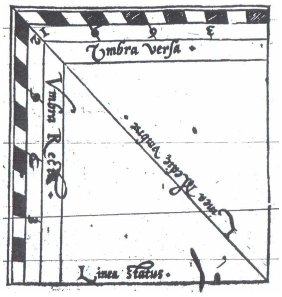
2 *Fine, La composition et usage du carré géométrique* (édition française), p. 10r. Le carré géométrique n’a pas besoin ici d’être enrichi d’un quart de cercle gradué, graduation utilisée pour la mesure de la hauteur des astres.

3 Celui de ces instruments qui perdurera sera le graphomètre. Introduit par Danfrie en 1597 dans la D*éclaration de l'usage du graphomètre*, il est accompagné d’un rapporteur et d’une règle graduée articulée.

Le « carré géométrique » est un instrument classique de la Géométrie pratique, parfois appelé « altimètre » car utilisé, entre autres choses, pour déterminer l’altitude. Placé en double au dos de l’astrolabe, il est aussi dit carré des ombres, le terme « ombre » renvoyant initialement à l’ombre du soleil. Avec le temps, il devient un instrument à part entière, un cadre de bois pouvant atteindre une cinquantaine de centimètres.

Astrolabe et carré géométrique[4]

Un carré géométrique comporte une alidade qui permet une visée, et des graduations latérales en 12 parties. Cet instrument permet des mesures d’angles aigus, qui se trouvent, non pas exprimés par une mesure en degré, mais par la valeur la tangente ou cotangente. De ce fait, les problèmes sont abordés par des problèmes de proportion et non pas des problèmes de trigonométrie. A la fin du XVI[e] siècle, l’usage de la trigonométrie n’est pas commune, alors que l’usage des propriétés associées aux triangles semblables est familière pour un individu initié aux mathématiques.



Graduations d’un carré géométrique[5]

Selon les situations, l’alidade croise la graduation horizontale, dite « ombre droite » et l’angle est supérieure à 45°, ou la graduation verticale, dite « ombre verse » et l’angle est inférieur à 45°, ou encore se trouve à leur intersection et dans ce cas très particulier l’angle vaut 45° (voir image ci-dessus) et les calculs sont sommaires. On remarquera que les divers cas ne sont pas étudiés en pointant les différentes valeurs possibles de l’angle, mais à partir des graduations sollicitées.

L’expression D = $\dfrac{12}{grad}$ joue un rôle essentiel. Elle est facile à utiliser pour les multiples diviseurs de 12 et les cas où D prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et 6 sont privilégiés. Le cas commun en topographie est celui où la distance à la hauteur mesurée est relativement grande ; les angles sont alors **inférieurs** à 45° et la graduation utilisée est la graduation verse. Les calculs sont dans ce cas régis par la formule $l = D \times h$ et c’est l’ombre qui est la plus grande. Dans le cas de l’ombre droite, donc pour un angle **supérieur** à 45°, la formule devient $h = D \times l$ et la hauteur est plus grande que l’ombre.

Au fil du texte la formule utilisée n’est pas toujours la même et l’inventaire des diverses formulations possibles veut être un gage de sérieux. Mais ceci donne une impression de complexité. Cette profusion de formulations se retrouve dans le *Traité de l’astrolabe* de Stoffler qui est la source indirecte de cet extrait du *Premier traité*.

4 Stoffler, *Elucidatio fabricae ususque astrolabii, 1513,* folio 73
5 Stoffler, Traité de la composition et fabrique de l’astrolabe, 1560, p. 197

Avec un pasimètre
Transcription et explicitation du *Premier traité*, folio 14r

f. 14r

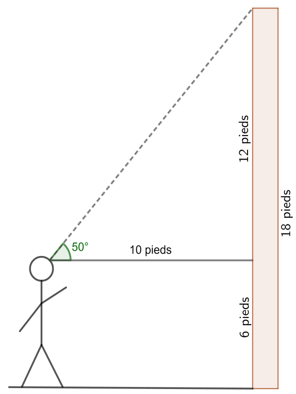
***L'usage du pasimètre** des dimensions géométriques*
Pour prendre la hauteur accessible

Pour prendre la hauteur accessible, il faut dresser un instrument à niveau par le moyen du petit plomb, puis hausser et baisser l'alidade tant que par le trou vous voyez le sommet de la hauteur mesurée.

Puis regarde sur quel nombre tombe l'alidade, laquelle vous prendrez en mémoire, si vous ne vouliez faire un rapport[6]*.*
En mettant l'alidade sur le même point ou nombre trouvé, et puis vous tirez deux lignes, l'une du long de la base et l'autre du long de la ligne, ainsi fait pour marquer le centre.
Et mesurez la distance depuis là où vous êtes jusqu'au pied de la hauteur, par pied ou par autre mesure[7]*.*
Vous divisez la base de ce rapport en autant de mesures que de pieds[8] *ou pas, et les dictes mesures seront grandeur à discrétion.*

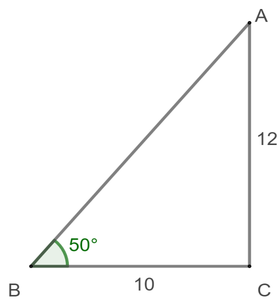
Ainsi par exemple, supposons que la ligne de foi, en prenant une hauteur, soit tombée sur 50 degrés, l'instrument étant dressé à niveau comme nous.
Puis faites votre rapport.
Puis en tirant 2 lignes l'une du long de la base et l'autre du long la ligne de foi AB et du long de la base CB, et marquez le centre au point B.
Et supposons que la ~~hauteur~~ distance depuis où je suis jusqu'au pied de la hauteur que je mesure, qu'il y a dix pas[9]*.*
Je divise donc la base dudit triangle CB[10] *en 10 parties égales, grandes à discrétion, qui représenteront les pieds réduits en petits.*
Et sur la fin qui est au point C, je tire une ligne perpendiculaire qui vient toucher au point A.
Et je mesure les mêmes pas que la base et poursuis toujours jusqu'à l'attouchement des deux lignes.
Bref, autant que contiendra la perpendiculaire avec AC de mesures, autant contiendra de pieds pour de vraies mesures.

Mais faut prendre garde d'ajouter la hauteur de l'instrument où il est posé jusqu'à terre. Comme à la précédente hauteur, il y a 12 pieds, ajoutez à icelle 3°[11] *qui sont ici trouvés depuis l'instrument jusqu'à terre.*
Et autant que contiendra de mesures la ligne AB, autant contiendra l'échelle ou hypoténuse depuis l'instrument jusqu'au sommet de la hauteur.
Comme ici au précédent exemple, trouvez que la ligne AB contient 18 pieds ainsi de hauteur.



Report sur papier
Cas général

Report sur papier
Exemple



On trouve 12

Retour vers le terrain

H = 6 pieds + 12 pieds

H= 18 pieds

6 « rapport » a même sens que « report » sur une feuille. On en vient donc à une figure.
7 Cette étape se fait sur le terrain et aurait dû être énoncée plus tôt.
8 Ce devrait être des pieds. 1 pas = 2 pieds
9 1 pas = 2 pieds
10 Il est écrit par erreur base CD.
11 Le point est placé au-dessus du 3. Ce qui signifie vraisemblablement 3 pas, et donc 6 pieds.

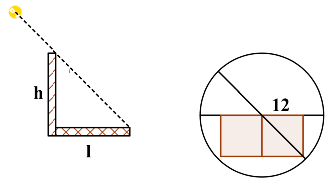
Avec un carré géométrique
Transcription et explicitation du *Premier traité*, folios 19r et 19v

f. 19r

L'usage du carré géométrique pour savoir la hauteur d'une tour par l'ombre d'icelle

Prends la hauteur du soleil ou de la lune selon le temps.
Et si tu vois que l'alidade touche précisément la ligne du milieu, aussi la hauteur de chaque chose sera égale à sa « hauteur » mesurée, donc <à> l'ombre de la chose à mesurer. Et tu auras la hauteur d'icelle.

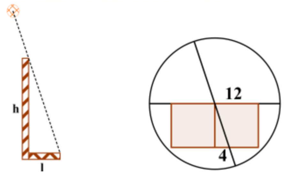
Avec longueur de l'ombre et hauteur du Soleil



Ligne du milieu **45°**

Mais si le soleil ou la lune sont élevés moins ou plus de 45 degrés, laisse pendre ton astrolabe contre le soleil ou la lune.
Élève ou baisse l'alidade jusqu'à ce que par les pinnules tu voies le soleil et le point de l'échelle de l'ombre droite. Tu noteras où tombera la ligne fiduciale[12]. Et autant que le nombre se trouvera en 12, autant de fois l'ombre[13] sera plus grande que son corps. Comme si elle tombe sur 4, il[14] sera 3 fois plus grand car 4 est trois fois en 12.

Ombre droite > 45°

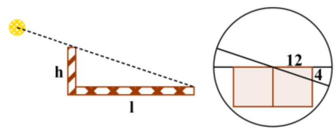


$$\frac{h}{l} = \frac{12}{grad}$$

$$h = \frac{12}{4} \times l$$

Mais si la ligne fiduciale tombe sur l'ombre réflexe[15], cette fois alors l'ombre sera plus grande que son corps, et autant de fois qu'est ledit nombre en 12, autant l'ombre[16] est plus moindre que le corps.

Ombre verse < 45°



Puisque $\frac{l}{h} = \frac{12}{grad}$

on a ici

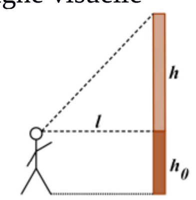
$$l = D \times h \text{ avec } D = \frac{12}{grad}$$

Ou bien $h = \frac{4 \times l}{12}$

Ou plutôt, multiplie par le dit nombre[17] les pas ou pieds de la longueur de l'ombre, prend le produit divisé par 12, et le nombre quotient sera la hauteur de la dite tour.

Pour trouver la hauteur des choses accessibles

Avec la ligne visuelle



$H = h_0 + h$

Mettez l'alidade sur la ligne du milieu, puis vous approchez ou reculez tant que voyez la sommité de la hauteur. Cela fait, mesurez par pas ou pieds l'espace qui est entre vous et le pied de la hauteur. Et à ce nombre ajoutez

Avec déplacement

cas = 45°

12 La ligne fiduciale est la ligne déterminée par l'alidade, souvent appelée « ligne de foi ». « Ligne fiduciale » est une expression utilisée par Pierre Forcadel en 1570 dans sa traduction de la *Pratique de la géométrie* d'Oronce Fine. Le traducteur de Stoffler utilise en 1560 « ligne de foi. »

13 Inversion des mots « ombre » et « corps » dans la phrase.

14 « Il » = le corps

15 Le texte du manuscrit a été corrigé, le mot ajouté est « droite ». Cette erreur d'un lecteur est compréhensible si on se réfère à la comparaison du corps et de son ombre. Le texte initial « ombre réflexe » était correct, bien que cette expression soit rarement utilisée. Pierre de Mesmes, dans sa traduction de Stoffler, emploie page 198 l'expression« ligne visuelle droite, ou réflexe ». Le terme « réflexe » au sens de « verse » se retrouve dans ce premier traité au folio suivant 19v.

16 A nouveau inversion des mots »ombre » et « corps ».

17 Le dit nombre est le nombre de graduations indiqué par l'alidade.

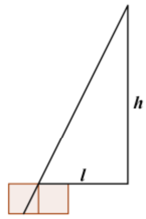
la hauteur de votre œil, et cela <sera> la mesure de la hauteur de la dite chose.

$h = l$

Ou autrement, sans te mouvoir, hausse ou baisse l'alidade tant que tu voies la sommité de la hauteur. Puis mesure l'espace qu'il y a entre la station et le pied de la hauteur. Ce nombre <étant> multiplié par 12, et le produit divisé par le nombre renseigné par l'alidade, de ce quotient ajoute la hauteur de ton œil, et ce nombre sera la hauteur de la tour.

Sans déplacement

cas commun > 45°



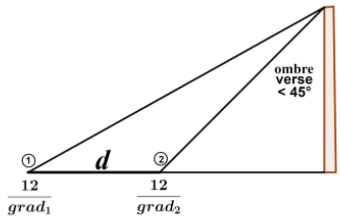
puisque $\frac{h}{l}=\frac{12}{grad}$

on a ici $h=\frac{l\times 12}{grad}$

Pour trouver la hauteur des choses inaccessibles

Regarde par les pinnules de ton alidade le sommet[18] de la hauteur et regarde sur quel nombre tombe l'alidade. Et par icelui divise 12 et garde ta quantité. Comme[19] si ta ligne se trouve sur 3 divise 12 restera 4 desquels tu te souviendras.
Puis en reculant ou avançant, fais ton autre station et prends garde sur quel nombre elle tombe.
Par icelui nombre divise 12. Et le nombre quotient soustrais du premier s'il est moindre, ou bien au contraire s'il est plus grand, soustrais le premier d'icelui ~~par lesquels tu diviseras~~.
Puis mesure l'espace qui est entre les deux stations par pieds ou par autre chose et icelles mesures[20]. Divise icelle[21] par le nombre devant gardé.
Et le nombre quotient qui restera de la division, sera la hauteur recherchée en y ajoutant ta hauteur.

Cas < 45°



$$D=\left|\frac{12}{grad\,1}-\frac{12}{grad\,2}\right|$$

$$h=\frac{d}{D}$$

$$H = h + h_0$$

Mais observe cette règle générale que fait la soustraction du nombre quantième pour des points de l'ombre réflexe[22] trouvés aux deux stations. S'il t'en reste un, alors l'espace des deux intervalles sera aussi grand que la hauteur, en y ajoutant la tienne.
S'il en reste 2, <ce> sera une[23] fois aussi grand. 3, trois fois aussi grand.

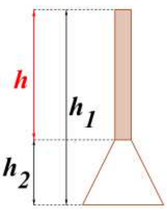
$d = D \times h$

si $D = 1$ alors $d = 1\times h$
si $D = 2$ alors $d = 2\times h$
si $D = 3$ alors $d = 3\times h$

Pour savoir la hauteur d'une tour située sur une montagne

f. 19v

Il faut prendre la hauteur de la montagne comme est dit ci-devant par deux stations. Puis derechef, prends la hauteur de la tour[24] pour en soustraire la hauteur précédente <de> la montagne. Et par ainsi, la hauteur de la tour te sera connue.



$h = h_1 - h_2$

18 « Sommet » écrit ici « somé ». Sommet est le mot employé par Stoffler. Ailleurs on trouve aussi sommité dans ce *Premier traité*.
19 « Comme » au sens de « par exemple ».
20 Il s'agit sans doute des subdivisions de l'unité de mesure choisie.
21 Il s'agit de la mesure entre les deux stations.
22 « ombre réflexe » au sens d'ombre verse ». Le mot « réflexe » a aussi été utilisé folio 19r et a été barré ultérieurement. Voir la note de bas de page.
23 Une fois de plus, fait deux fois.
24 Hauteur du sommet de la tour perchée sur une montagne.